## 0.1 28 décembre 2015

### 0.1.1 Contraintes thermiques en plasticité

On considère un prisme d'axe $x_1$ dont le déplacement axial est bloqué. Ses faces latérales sont libres, et on étudie le comportement dans une section courante, en négligeant l'effet des encastrements. L'état de contrainte est donc supposé uniaxial en direction $x_1$. Le chargement extérieur appliqué est dû uniquement à la température, la déformation totale restant nulle. On notera respectivement $\sigma$, $\varepsilon$, $\varepsilon^e$, $\varepsilon^p$, $\varepsilon^{th}$, la contrainte, la déformation totale, la déformation élastique, la déformation plastique et la dilatation thermique. On notera par $T$ la variation de température par rapport à l'état de référence à contrainte et déformation nulles. En introduisant le coefficient de dilatation thermique linéaire $\alpha$, on a donc $\varepsilon^{th} = \alpha T$.

**Ecrouissage isotrope** On suppose que le matériau est élastoplastique, et qu'il obéit à une règle d'écrouissage isotrope linéaire. Le module de Young, $E$, le module plastique, $H$i (on suppose que $H < E$), et la limite d'élasticité initiale $\sigma_y$ sont supposés indépendants de la température. $R$ dépend donc uniquement de la déformation plastique cumulée, $p$, nulle à l'origine, et définie par $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$ :

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - \sigma_y - R \qquad R(p) = Hp$$

*1. Définir l'augmentation de température $T_e$ pour laquelle on atteint la limite d'élasticité du matériau.*

La déformation totale reste nulle durant la variation de température :

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha T = 0$$

ce qui fournit la valeur de température demandée, pour $\sigma = \sigma_y$ :

$$T_e = \frac{\sigma_y}{E\alpha}$$

*2. On suppose que $T$ passe de 0 à $T_m$ (avec $T_m > T_e$). Exprimer le fait que le critère de plasticité $f$ reste nul pendant l'écoulement plastique, et définir les valeurs de contrainte $\sigma_m$ et de déformation plastique $\varepsilon^p_m$ à la fin de la montée en température.*

La déformation totale comporte maintenant un terme de déformation plastique, si bien que :

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p + \alpha T = 0$$

Comme l'écoulement plastique s'effectue en compression, on a $\varepsilon^p = -p$, si bien que le fait que le critère reste nul s'écrit :

$$\sigma = -\sigma_y + H\varepsilon^p$$

La résolution de ce petit système fournit alors :

$$\varepsilon^p_m = -\frac{E\alpha(T_m - T_e)}{H + E}$$

$$\sigma_m = -\frac{EH}{H+E}\left(\sigma_y + H\alpha T_m\right)$$

*3. On ramène maintenant $T$ à zéro. Exprimer la condition correspondante en déformation. En supposant dans un premier temps que le matériau reste élastique pendant la décharge, indiquer quelle* *sont alors les valeurs de la déformation plastique et de la contrainte lors du retour à $T = 0$ ? Indiquer à quelle condition le matériau reste effectivement élastique en fin de refroidissement.*

Il faut simplement annuler la déformation thermique. Si le matériau reste élastique, la déformation plastique est inchangée, et la contrainte en fin de refroidissement est $\sigma_r$ est telle que $\varepsilon_m^p + \sigma_r/E = 0$. La comparaison avec l'expression de la question précédente donne immédiatement :

$$\sigma_r = \sigma_m + E\alpha T_m = \frac{EH}{H+E}\left(E\alpha T_m - \sigma_y\right) = \frac{E^2\alpha}{H+E}\left(T_m - T_e\right)$$

Cette expression sera valide tant que la contrainte obtenue reste inférieure à la limite d'élasticité actuelle, qui, après le premier chargement, vaut $-\sigma_m$ ; il faut donc assurer :

$$\frac{EH}{H+E}(E\alpha T_m - \sigma_y) < \frac{EH}{H+E}(\sigma_y + H\alpha T_m)$$

Cette condition sera vérifiée si la temperature ne dépasse pas un certain seuil lors du premier chauffage :

$$T_m < \frac{2\sigma_y}{\alpha(E-H)}$$

*4. Calculer la déformation plastique et la contrainte à $T = 0$ pour le cas où il y a replastification à la décharge.*

Si le seuil précédent est dépassé, on repart de $\varepsilon_m^p$ en déformation plastique, avec un seuil actuel à $-\sigma_m$, et le matériau subit un incrément de déformation $\delta^p$ positif tel que :

$$p_r = -\varepsilon_m^p + \delta\varepsilon^p \qquad \varepsilon_r^p = \varepsilon_m^p + \delta\varepsilon^p$$

A la fin du refroidissement, il faut vérifier les deux égalités suivantes, correspondant respectivement à la loi de comportement (déformation nulle, déformation thermique nulle) et à la condition de plasticité :

$$\sigma = -E\varepsilon_m^p - E\delta\varepsilon^p$$
$$\sigma = \sigma_y - H\varepsilon_m^p + H\delta\varepsilon^p$$

On trouve :

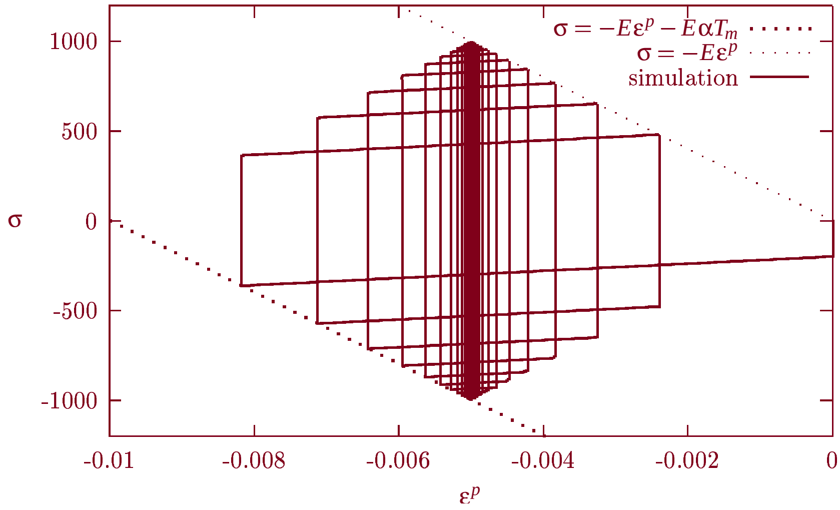
$$\delta\varepsilon^p = \frac{((E-H)\alpha T_m - 2\sigma_y)\,E}{(E+H)^2}$$
$$\varepsilon_r^p = -\frac{2EH\alpha T_m + (E-H)\sigma_y}{(E+H)^2}$$

La contrainte vient ensuite simplement :

$$\sigma_r = -E\varepsilon_r^p = \frac{E}{(E+H)^2}\left(2EH\alpha T_m + (E-H)\sigma_y\right)$$

*5. En supposant que l'on applique un grand nombre de cycles de température entre 0 et $T_m$, décrire qualitativement l'évolution de l'écoulement plastique et définir l'état final du matériau, en se plaçant dans le plan (*déformation mécanique–contrainte*).*

La déformation mécanique que subit le prisme varie entre 0 et $-\alpha T_m$ au cours des cycles. Les deux courbes limites sur lesquelles se retrouvent les points représentatifs au chauffage et au refroidissement sont donc respectivement $\sigma = -E\varepsilon^p - E\alpha T_m$ et $\sigma = -E\varepsilon^p$. Au cours des cycles, la limite d'élasticité augmente peu à peu. L'état limite correspond au moment où la taille du domaine d'élasticité (deux fois la limite élastique) sera égale à $2E\alpha T_m$. Une illustration de cette évolution est donnée sur la simulation ci-dessous, réalisée avec $E = 10000$ MPa, $\alpha = 10^{-5}$, $T_m = 1000$°C . On vérifie bien qu'à l'état asymptotique la taille du domaine élastique est de 2000 MPa.




*6. En faisant $H = 0$ dans les équations précédentes, commenter le cas d'un comportement élastique parfaitement plastique.*

Le raisonnement de la question précédente ne tient plus si $H = 0$. Dans ce cas, il n'u a pas d'évolution de la taille du domaine d'élasticité, et l'état asymptotique, atteint dès le deuxième cycle, est caractérisé par des contraintes variant entre $\pm\sigma_y$. Le cycle reste ouvert au lieu qu'il soit réduit à une ligne comme dans le cas précédent.

**Ecrouissage cinématique** *Reprendre les questions 3, 4, 5 de la section précédente en supposant maintenant que le matériau obéit à une règle d'écrouissage cinématique linéaire :*

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \qquad X = H\varepsilon^p$$