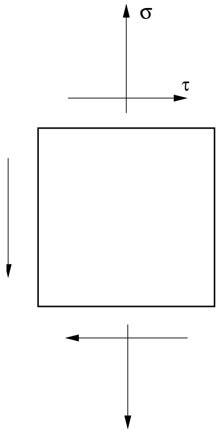
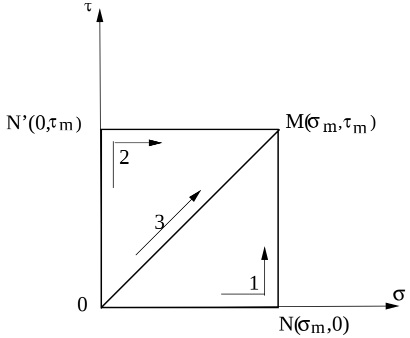
INFLUENCE DU TRAJET DE CHARGEMENT EN PLASTICITE POUR UN CHARGEMENT DE TRACTION—CISAILLEMENT

On considère un élément de matière chargé en traction-cisaillement. Le matériau vérifie le critère de von Mises, avec un écrouissage isotrope linéaire : $f(\underset{\sim}{\sigma},R) = J - R$, avec $R = Hp + \sigma_0$. La limite d'élasticité initiale valant σ_0, on suppose que $\sigma_m > \sigma_0$, et que $\tau_m\sqrt{3} > \sigma_0$.

Etudier l'évolution de la déformation plastique dans les 3 cas suivants :
(1) chemin ONM (traction jusqu'à σ_m, puis cisaillement jusqu'à τ_m avec traction constante)
(2) chemin $ON'M$ (cisaillement jusqu'à τ_m, puis traction jusqu'à σ_m avec cisaillement constant)
(3) chemin OM "direct" (traction et cisaillement appliqués de façons proportionnelles).





Il s'agit d'appliquer ici les relations qui définissent l'écoulement en plasticité, dans le cas particulier étudié où le module plastique H est indépendant de la déformation plastique :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{p}\underset{\sim}{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad \dot{p} = (\dot{\underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}})/H \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\mathbf{n}} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{s}}}{J} \quad \text{et} \quad J = \left(\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{s}} : \underset{\sim}{\mathbf{s}}\right)^{0.5}$$

1. En traction selon ON, on a :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\mathbf{s}} = \sigma \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$J = |\sigma| \quad \underset{\sim}{\mathbf{n}} = \text{signe}(\sigma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

d'où, pour $\sigma = \sigma_0$: $\dot{p} = (\dot{\sigma}/H)\text{signe}(\sigma)$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = (\dot{\sigma}/H) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

à intégrer à partir de $\sigma = \sigma_0$, ce qui donne en N :

$$\varepsilon^p_{11}(\text{N}) = (\sigma_m - \sigma_0)/H \; ; \; \varepsilon^p_{12}(\text{N}) = 0$$

En cisaillement selon NM, avec τ variable et σ constant à σ_m, les expressions précédentes deviennent :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_m & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\tau} & 0 \\ \dot{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 2\sigma_m/3 & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma_m/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m/3 \end{pmatrix}$$

$$J=\sqrt{\sigma_m^2+3\tau^2} \quad \underset{\sim}{\mathbf{n}}=\frac{3}{2\sqrt{\sigma_m^2+3\tau^2}}\begin{pmatrix}2\sigma_m/3 & \tau & 0\\ \tau & -\sigma_m/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_m/3\end{pmatrix}$$

d'où

$$\dot{p}=\frac{3\tau\dot{\tau}}{H\sqrt{(\sigma_m^2+3\tau^2)}}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{11}=\frac{3\sigma_m\tau\dot{\tau}}{H(\sigma_m^2+3\tau^2)} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^p_{12}=\frac{9\tau^2\dot{\tau}}{2H(\sigma_m^2+3\tau^2)}$$

si bien que :

$$\varepsilon^p_{11}=\varepsilon^p_{11}(\mathrm{N})+\frac{\sigma_m}{2H}\ln\left(\frac{\sigma_m^2+3\tau^2}{\sigma_m^2}\right) \ ; \ \varepsilon^p_{12}=\frac{3\tau}{2H}-\frac{\sqrt{3}\sigma_m}{2H}\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_m}\right)$$

2. En cisaillement selon ON′, on a :

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{pmatrix}0 & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\mathbf{s}}=\underset{\sim}{\sigma} \quad J=|\tau|\sqrt{3} \quad \underset{\sim}{\mathbf{n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{signe}(\tau)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

d'où, pour $\tau>\sigma_0/\sqrt{3}$: $\dot{p}=(\dot{\tau}\sqrt{3}/H)\mathrm{signe}(\tau)$;

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p=\frac{3\dot{\tau}}{2H}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

à intégrer à partir de $\tau=\sigma_0/\sqrt{3}$, ce qui donne en N′

$$\varepsilon^p{}_{11}(\mathrm{N}')=0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^p_{12}(\mathrm{N}')=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}\tau_m-\sigma_0}{H}$$

On obtient la formule en cisaillement pur à partir de la forme en traction en remplaçant dans cette dernière la contrainte σ par $\tau\sqrt{3}$ (même invariant de von Mises) et la déformation plastique axiale ε^p_{11} par la déformation plastique de "l'ingénieur" en cisaillement $\gamma^p=2\varepsilon^p_{12}/\sqrt{3}$. En cisaillement selon N′M, avec σ variable et τ constant égal à τ_m, les expressions précédentes deviennent :

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{pmatrix}0 & \tau_m & 0\\ \tau_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\dot{\sigma}}=\begin{pmatrix}\dot{\sigma} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}}=\begin{pmatrix}2\sigma/3 & \tau_m & 0\\ \tau_m & -\sigma/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma/3\end{pmatrix}$$

$$J=\sqrt{\sigma^2+3\tau_m{}^2} \quad \underset{\sim}{\mathbf{n}}=\frac{3}{2\sqrt{\sigma^2+3\tau_m{}^2}}\begin{pmatrix}2\sigma/3 & \tau_m & 0\\ \tau_m & -\sigma/3 & 0\\ 0 & 0 & -\sigma/3\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\dot{p}=\frac{\sigma\dot{\sigma}}{H\sqrt{\sigma^2+3\tau_m{}^2}}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{11}=\frac{\sigma^2\dot{\sigma}}{H\sqrt{\sigma^2+3\tau_m{}^2}} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^p_{12}=\frac{3\tau_m\sigma\dot{\sigma}}{2H(\sigma^2+3\tau_m^2)}$$

si bien que :

$$\varepsilon^p_{11}=\frac{\sigma}{H}-\frac{\sqrt{3}\tau_m}{H}\mathrm{atan}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}\tau_m}\right)$$

et

$$\varepsilon^p_{12}=\varepsilon^p_{12}(\mathrm{N}')+\frac{3\tau_m}{4H}\ln\left(\frac{\sigma^2+3\tau_m^2}{3\tau_m^2}\right)$$

3. Dans ce cas, il est possible d'exprimer l'ensemble des relations à l'aide d'un paramètre de chargement unique, k, qui varie entre 0 et 1 (hypothèse de *chargement simple*).

$$\underset{\sim}{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\sigma_m & \tau_m & 0\\ \tau_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\dot{\sigma}}=\dot{k}\begin{pmatrix}\sigma_m & \tau_m & 0\\ \tau_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}} = k \begin{pmatrix} 2\sigma_m/3 & \tau_m & 0 \\ \tau_m & -\sigma_m/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m/3 \end{pmatrix} \qquad J = k\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \frac{3}{2\sqrt{\sigma_m^2+3\tau_m^2}} \begin{pmatrix} 2\sigma_m/3 & \tau_m & 0 \\ \tau_m & -\sigma_m/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m/3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\dot{p} = \frac{k}{H}\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2}$$

Contrairement aux deux cas précédents, la normale ne tourne pas durant le chargement, si bien qu'il y a un découplage entre les composantes :

$$\dot{\varepsilon}^p_{11} = \dot{k}\frac{\sigma_m}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{H} \qquad \dot{\varepsilon}^p_{12} = \dot{k}\frac{3\tau_m}{2H} = \frac{3\dot{\tau}}{2H} \quad \text{ou} \quad \frac{2\dot{\varepsilon}^p_{12}}{\sqrt{3}} = \quad \sqrt{3}\dot{\tau}H$$

La seule différence par rapport aux cas de traction pure ou de cisaillement pur réside dans les bornes d'intégration. Il y a plastification lorsque $k\sqrt{\sigma_m^2+3\tau_m^2}$, ce qui donne :

$$\varepsilon^p_{11} = \frac{\sigma_m}{H}\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_m^2+3\tau_m^2}}\right) \qquad \varepsilon^p_{12} = \frac{3\tau_m}{2H}\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_m^2+3\tau_m^2}}\right)$$

Application numérique : La figure ci-dessous montre le résultat obtenu dans chaque cas de chargement pour $\sigma_0 = 100$ MPa, $H = 10000$ MPa, avec comme contraintes maximales $\sigma_m = 300$ MPa et $\tau_m = 300$ MPa. Ce chargement rappelle que des contraintes égales en traction et cisaillement ne donnent pas des déformations équivalentes (ce sont des contraintes σ_m en traction et $\sigma_m/\sqrt{3}$ en cisaillement qui donnent des déformations équivalentes égales, ε^p_{11} en traction, et $2\varepsilon^p_{12}/\sqrt{3}$ en cisaillement.

Trajet ONM

En N : $\varepsilon^p_{11}(\mathrm{N}) = \dfrac{300-100}{10000} = 2.10^{-2}$

En M : $\varepsilon^p_{11}(\mathrm{M}) = \varepsilon^p_{11}(N) + \dfrac{300}{20000}\ln(4) = 4.079\,10^{-2}$

$\varepsilon^p_{12}(\mathrm{M}) = \dfrac{300}{20000} \times \left(3 - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1.779\,10^{-2}$

Trajet ON'M

En N′ : $\varepsilon^p_{12}(\mathrm{N}') = \quad \sqrt{3}2 \times \dfrac{300\times\sqrt{3}-100}{10000} = 3.634\,10^{-2}$

En M : $\varepsilon^p_{11}(\mathrm{M}) = \dfrac{300}{10000} \times \left(1 - \dfrac{\pi}{6}\sqrt{3}\right) = 0.279\,10^{-2}$

$\varepsilon^p_{12}(\mathrm{M}) = \varepsilon^p_{12}(\mathrm{N}') + \dfrac{300}{10000} \times \dfrac{3}{4} \times \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) = 4.281\,10^{-2}$

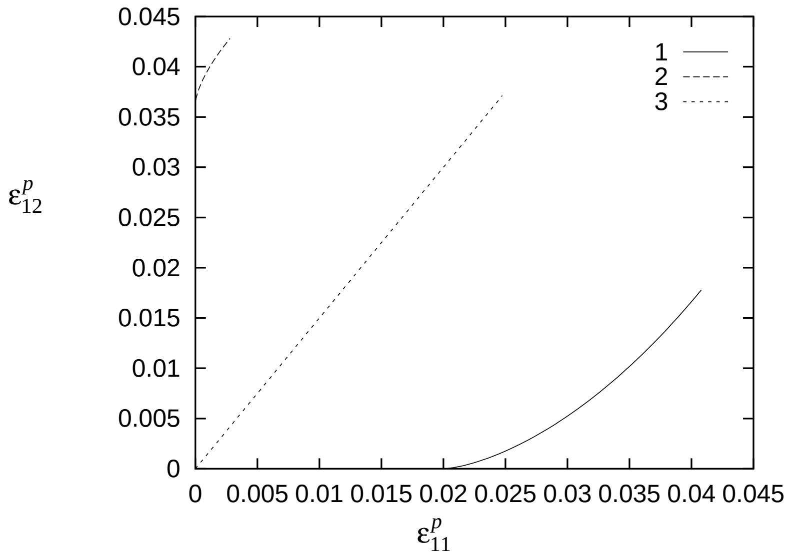
Trajet OM direct

En M : $\varepsilon^p_{11}(\mathrm{M}) = \dfrac{300}{10000} \times \left(1 - \dfrac{100}{2300}\right) = 2.500\,10^{-2}$

$\varepsilon^p_{12}(\mathrm{M}) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{300}{10000} \times \left(1 - \dfrac{100}{2300}\right) = 3.750\,10^{-2}$

Les chemins de déformation sont reportés sur la figure de la page suivante. On offre également sur cette page la possibilité d'effectuer d'autres applications numériques en utilisant des modèles plus complexes qu'un simple écrouissage isotrope linéaire.

Figure correspondant à l'exercice précédent (écrouissage isotrope linéaire) :



Pour obtenir d'autres simulations :

Modifier les valeurs affichées dans les champs suivants (chargement imposé et modèle de comportement), et soumettre le calcul à l'aide de la touche `Go`. Il est possible d'activer uniquement l'écrouissage isotrope, l'écrouissage cinématique, ou une combinaison des deux. L'écrouissage cinématique est présent si C est non nul, il est linéaire si D est nul, non linéaire dans le cas contraire. Tous les coefficients sont positifs ou nuls. Le paramètre σ_y, limite d'élasticité initiale, doit rester strictement positif. La signification précise des coefficients est indiquée sur la feuille de calcul qui est renvoyée par le serveur.

– Current values of the loading parameters
  σ_{11}^{max}= 3.00000e+02 σ_{12}^{max}= 3.00000e+02
– Current values of isotropic hardening
  σ_y= 100. σ_u= 1000. b= 1.
– Current values of kinematic hardening
  C= 0. D= 0.

Reset *Go*