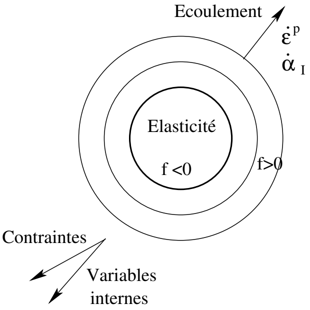


Plasticité avec écrouissage

Georges Cailletaud

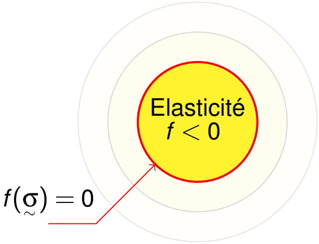
MINES ParisTech
Centre des Matériaux, CNRS UMR 7633

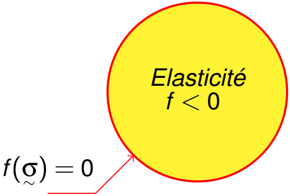
Plan

Plan

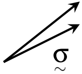
Lois plastiques et viscoplastiques *sans écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes





Viscoplasticité



Plasticité

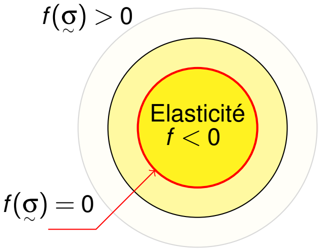
$\underset{\sim}{\dot\varepsilon}^p = \dot\lambda \underset{\sim}{n}$ $\quad \dot f = 0$

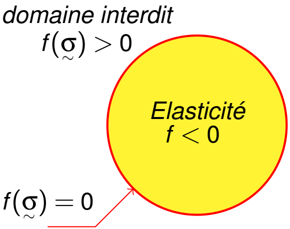
$$\underset{\sim}{\dot\varepsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n}$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

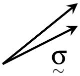
Lois plastiques et viscoplastiques *sans écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes





Viscoplasticité



Plasticité

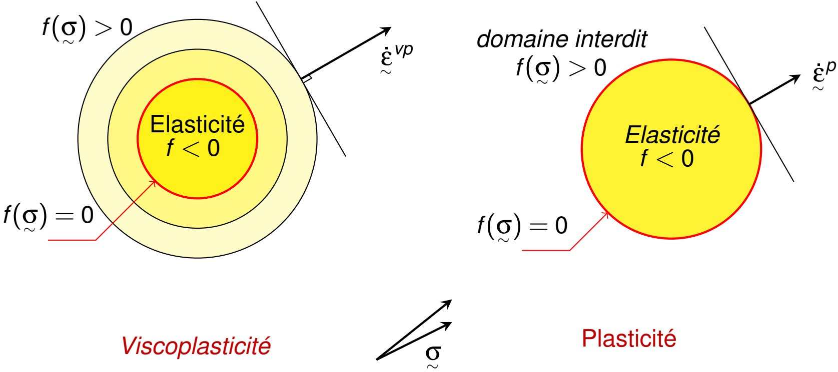
$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Lois plastiques et viscoplastiques *sans écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes

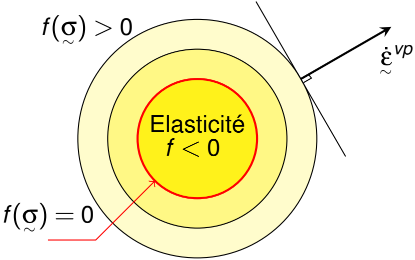


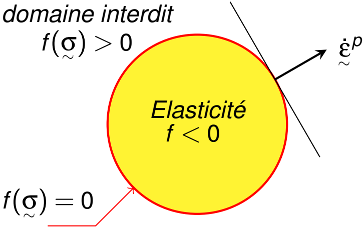
$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\underset{\sim}{n} \qquad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

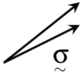
Lois plastiques et viscoplastiques *sans écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes





Viscoplasticité



Plasticité

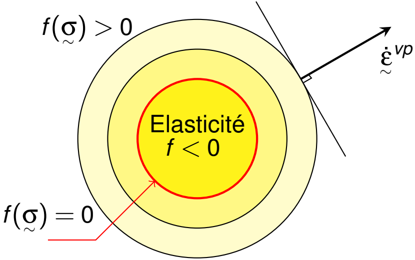
$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n}$$

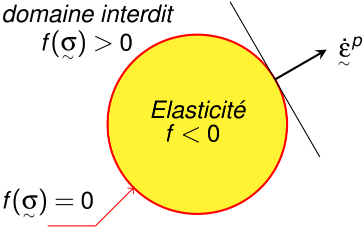
$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Lois plastiques et viscoplastiques *sans écrouissage*

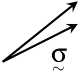
Représentations dans l'espace des contraintes





Viscoplasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\underset{\sim}{n}$$



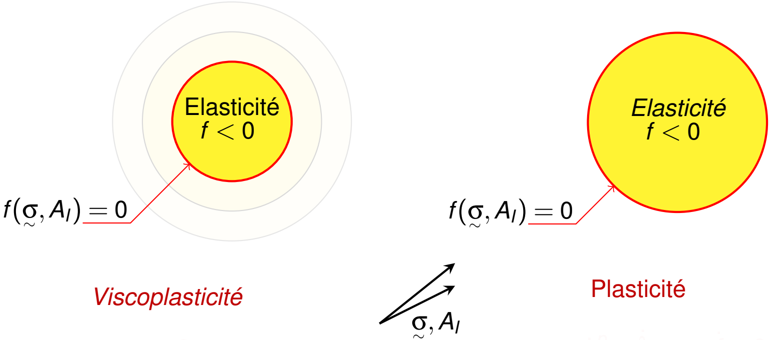
$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Plasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda}\underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$



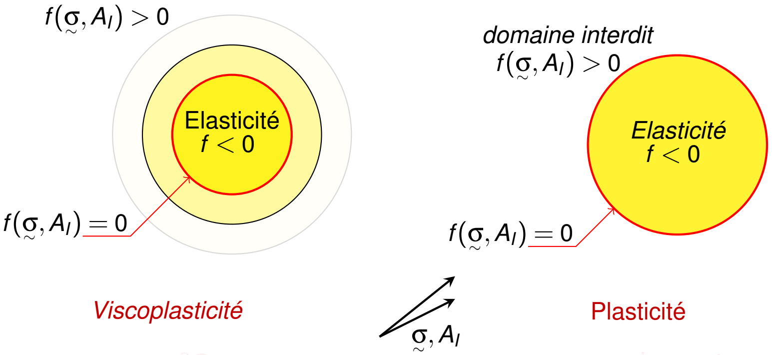
$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n} \qquad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I} \qquad -\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I$$

Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$



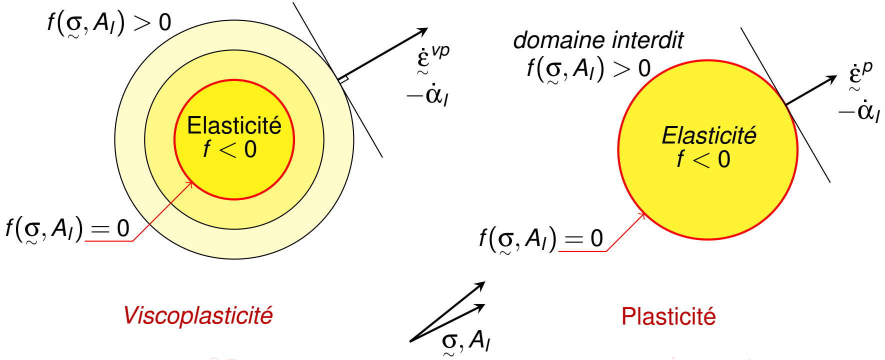
$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\underset{\sim}{n} \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I \qquad -\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$



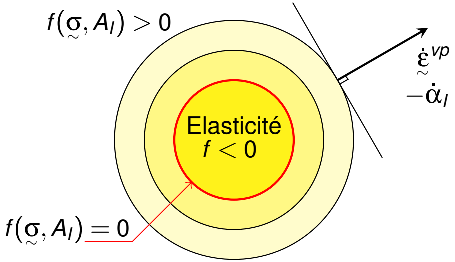
$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

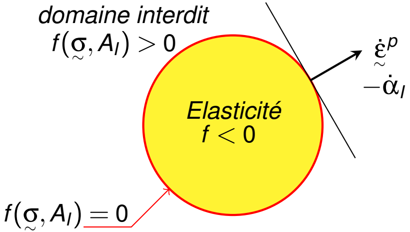
$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I \qquad -\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

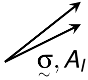
Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$





Viscoplasticité



Plasticité

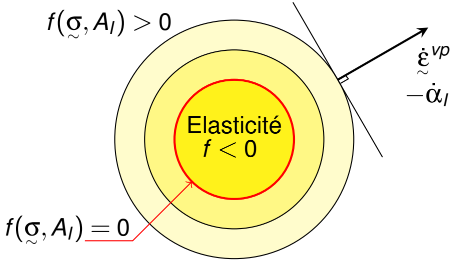
$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

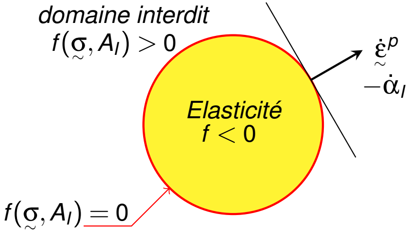
$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I \qquad -\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

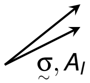
Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$





Viscoplasticité



Plasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\underset{\sim}{n}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda}\underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

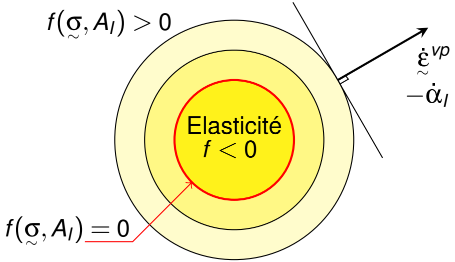
$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

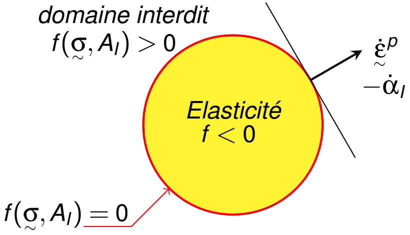
$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I$$

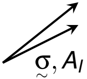
$$-\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

Lois plastiques et viscoplastiques avec *écrouissage*

Représentations dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage $(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$







Viscoplasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \underset{\sim}{n}$$

$$-\dot{\alpha}_I = \frac{\partial \Omega}{\partial f} m_I$$

Plasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \qquad \dot{f} = 0$$

$$-\dot{\alpha}_I = \dot{\lambda} m_I$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad m_I = \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

Introduction des variables d'écrouissage

- Notion de *variables d'état,* α_I , qui interviennent dans l'énergie libre (Ψ, énergie libre spécifique, potentiel d'état). On suppose que les variables d'état suffisent pour représenter l'ensemble de l'histoire passée.

$$\rho\Psi = \rho\Psi\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e, \alpha_I\right)$$

- La variation de Ψ désigne l'énergie stockée pendant le process de déformation

$$\rho\dot{\Psi} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}^e} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^e + \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}\dot{\alpha}_I = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^e + A_I\dot{\alpha}_I$$

- Définition des *variables d'écrouissage,* A_I par extension de la notion de potentiel élastique

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}^e} \qquad\qquad A_I = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}$$

- *Les variables d'écrouissage reflètent l'effet mécanique des variables d'état sur le comportement du matériau*

Définition de la dissipation intrinsèque

- La *dissipation* est la différence entre l'énergie mécanique fournie et l'énergie stockée de façon temporaire

$$\mathcal{D} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} - \dot{\Psi} = (\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^e + \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p) - (\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^e + A_I \dot{\alpha}_I)$$

- *Il n'y a bien entendu pas de dissipation si le comportement est purement élastique*
- On appelle modèle standard généralisé un modèle qui introduit la règle de normalité pour les contraintes *et* les variables d'écrouissage. On définit des vecteurs contraintes généralisées Z et déformations généralisées z :

$$Z = (\underset{\sim}{\sigma}, A_I) \qquad z = (\underset{\sim}{\varepsilon}^p, -\alpha_I) \qquad \mathcal{D} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I = Z\dot{z}$$

- L'unité de Z est le Pa, ou encore le J.m^{-3} ; celle de $\dot{z}$ est la s^{-1} ; celle de $\mathcal{D}$ est donc le J.m^{-3}.s^{-1}, ou le W.m^{-3}

Plan

Ecoulement plastique

- *Rappel, travail maximal pour un matériau parfaitement plastique :*
  - Hill : il faut réaliser le max de $\mathcal{D} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$
  - On maximise $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ sous la contrainte $f(\underset{\sim}{\sigma}) \leqslant 0$
- Extension du principe du travail maximal ; au lieu de la puissance plastique, on cherche à *maximiser la dissipation intrinsèque*

$$\mathcal{D} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I = Z \dot{z}$$

- Il faut maximiser $Z\dot{z}$ sous la contrainte $f \leqslant 0$; on pose :

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - A_I \dot{\alpha}_I - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$$

  et on annule $\partial\mathbb{F}/\partial Z$, soit $\partial\mathbb{F}/\partial\underset{\sim}{\sigma}$ et $\partial\mathbb{F}/\partial A_I$
- Normalité pour l'écoulement plastique *et* pour l'écrouissage :

$$\dot{z} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Z} \qquad \text{soit :} \quad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda}\, \underset{\sim}{n} \qquad \dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I} = -\dot{\lambda} m_I$$

Ecoulement viscoplastique

- Extension de la notion de potentiel à l'espace des contraintes généralisées pour représenter l'écoulement
- Contraintes généralisées, Z, déformations généralisées, z
- Viscoplasticité, $\Omega = \Omega(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) = \Omega(Z)$

$$\dot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial Z}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{v} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \qquad \dot{\alpha}_I = -\dot{v} \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

Dissipation pour un modèle standard généralisé

- Dans le cas où les dérivées sont nulles, on a bien atteint un maximum si f est une fonction convexe de ses variables $\underset{\sim}{\sigma}$ et $-A_I$
- On retrouve sous forme généralisée l'équivalence

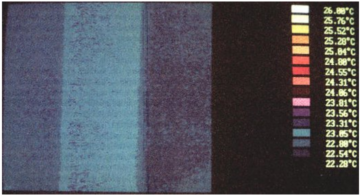
Parmi tous les Z^* admissibles, Z réel maximise la dissipation intrinsèque	$\equiv$	La direction d'écoulement $\dot{z}$ est normale à la surface définie par f ; le domaine défini par f est convexe.

- Si le potentiel Ω est convexe et contient $(Z = 0)$, la dissipation $\mathcal{D}$ est automatiquement positive.

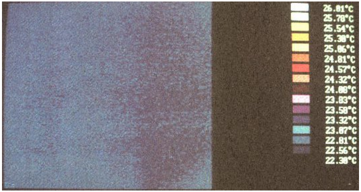
$$(Z - Z^*)\,\dot{z} = (Z - Z^*)\,\frac{\partial \Omega}{\partial Z} \geqslant 0$$

Dissipation thermique associée à l'écoulement plastique

$t = 0s \quad T = 23.05°C$

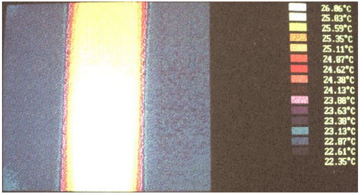


$t = 31s \quad T = 22.81°C$



$t = 101s \quad T = 24.32°C$

$t = 203s \quad T = 25.70°C$



Traction à faible vitesse de déformation sur alliage d'aluminium ($\dot{\varepsilon} = 1O^{-3}\,s^{-1}$)

Chrysochoos et al *(Univ. Montpellier)*

Retour sur les variables d'écrouissage à utiliser

- Critère de von Mises avec écrouissage cinématique et isotrope :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{X}, R) = J(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{X}) - R - \sigma_y$$

- Soient $\underset{\sim}{\alpha}$ et r les variables d'état associées à $\underset{\sim}{X}$ et R
- Ecrouissage cinématique

$$\dot{\underset{\sim}{\alpha}} = -\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$$

- Ecrouissage isotrope

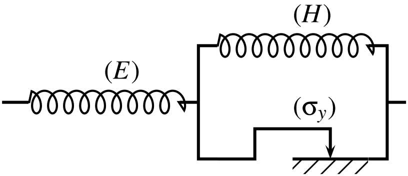
$$\dot{r} = -\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} = \dot{p}$$

- Les variables pertinentes pour les écrouissages cinématique et isotrope sont bien respectivement $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ et p

Plan

Ecrouissage cinématique linéaire 1D

Energie stockée



- Les variables d'état sont ε^e et la déformation dans le ressort (H), ε^p
- L'énergie libre est l'énergie élastique provisoirement stockée dans les ressorts

$$\Psi(\varepsilon^e, \varepsilon^p) = 0.5 E \, \varepsilon^{e2} + 0.5 \, H \varepsilon^{p2}$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = E\varepsilon^e \qquad X = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} = H\varepsilon^p$$

- Elasticité (σ, ε^e), écrouissage (X, ε^p)

Ecrouissage cinématique linéaire 1D

Energie dissipée

- Dissipation intrinsèque est caractérisée par :
  taux d'énergie dissipée = énergie fournie - énergie stockée
- Cas 1D considéré précédemment :

$$\mathcal{D} = \sigma\dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = (\sigma\dot{\varepsilon}^e + \sigma\dot{\varepsilon}^p) - (\sigma\dot{\varepsilon}^e + X\dot{\varepsilon}^p) = \sigma\dot{\varepsilon}^p - X\dot{\varepsilon}^p$$

- Le critère de plasticité s'écrit $f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y = 0$.
- La dissipation est donc le résultat du frottement sur le patin, en effet, avec $\dot{\varepsilon}^p = \dot{p}\,\text{signe}(\sigma - X)$:

$$\mathcal{D} = (\sigma - X)\dot{\varepsilon}^p = |\sigma - X|\dot{p} = \sigma_y\dot{p}$$

- L'énergie stockée, $0.5H\varepsilon^{p2}$, est libérée à la décharge
- Notion de *contraintes généralisées* :(σ, X), de *déformations généralisées* :(ε^e, $-\varepsilon^p$)

Dissipation dans le cas de l'écrouissage *isotrope* en 1D

- La variable A_I est R, la variable α_I associée est p
- Le critère de plasticité est :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_y = 0$$

- L'énergie libre s'écrit

$$\Psi(\varepsilon^e, p) = 0.5E\varepsilon^{e2} + 0.5Hp^2$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = E\varepsilon^e \qquad R = \frac{\partial \Psi}{\partial p} = Hp$$

- Taux d'énergie dissipée = énergie fournie - énergie stockée

$$\mathcal{D} = \sigma\dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} = \sigma\dot{\varepsilon} - \sigma\dot{\varepsilon}^e - R\dot{p} = \sigma\dot{\varepsilon}^p - R\dot{p} = (|\sigma| - R)\dot{p} = \sigma_y\dot{p}$$

- L'énergie stockée dans le matériau ne peut pas être récupérée, car p croît de façon monotone

Plan

Formulation des lois de comportement plastique

- Domaine d'élasticité

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) < 0 \qquad (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}})$$

- Décharge élastique

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) = 0 \qquad \dot{f}(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) < 0 \qquad (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}})$$

- Ecoulement plastique

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) = 0 \qquad \dot{f}(\underset{\sim}{\sigma}, A_I) = 0 \qquad (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} + \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p)$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \ldots \qquad \dot{\alpha}_I = \ldots$$

Ecrouissage $\equiv$ *Augmentation de limite d'élasticité pendant l'écoulement plastique*
$\equiv$ *Existence de mécanismes de stockage de l'énergie*

Plan

Loi de Prandtl-Reuss (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage isotrope

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, R) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \qquad 1D: \quad 0 = |\sigma| - \sigma_y - R(p)$$

- Il faut trouver le multiplicateur plastique dans

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- Le module plastique, H, définit la courbe d'écrouissage 1D monotone, $p = \varepsilon^p$

$$\sigma = \sigma_y + R(p) = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \qquad H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dp} = \frac{dR}{dp}$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \qquad \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} - H\dot{p} = 0$$

Loi de Prandtl-Reuss (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage isotrope

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, R) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \qquad \text{1D :} \quad 0 = |\sigma| - \sigma_y - R(p)$$

- Il faut trouver le multiplicateur plastique dans

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- Le module plastique, H, définit la courbe d'écrouissage 1D monotone, $p = \varepsilon^p$

$$\sigma = \sigma_y + R(p) = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \qquad H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dp} = \frac{dR}{dp}$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \qquad \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} - H\dot{p} = 0$$

Loi de Prandtl-Reuss (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage isotrope

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, R) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \qquad 1D: \quad 0 = |\sigma| - \sigma_y - R(p)$$

- Il faut trouver le multiplicateur plastique dans

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- Le module plastique, H, définit la courbe d'écrouissage 1D monotone, $p = \varepsilon^p$

$$\sigma = \sigma_y + R(p) = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \qquad H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dp} = \frac{dR}{dp}$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \qquad \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} - H\dot{p} = 0$$

Loi de Prandtl-Reuss (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage isotrope

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, R) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y - R(p) \qquad \text{1D :} \quad 0 = |\sigma| - \sigma_y - R(p)$$

- Il faut trouver le multiplicateur plastique dans

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- Le module plastique, H, définit la courbe d'écrouissage 1D monotone, $p = \varepsilon^p$

$$\sigma = \sigma_y + R(p) = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \qquad H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dp} = \frac{dR}{dp}$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \qquad \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} - H\dot{p} = 0$$

Loi de Prandtl-Reuss (2/2)

- On trouve donc le multiplicateur

$$\dot{\lambda} = \dot{p} = \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H}$$

- Expression 3D de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H}\,\underset{\sim}{n} \qquad \text{avec} \quad \underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

- Cas particulier de la traction simple

$$n_{11} = signe(\sigma) \qquad \underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\sigma}\, signe(\sigma) \qquad \dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\varepsilon}^p_{11}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{n_{11}\,\dot{\sigma}}{H}\, n_{11} = \frac{\dot{\sigma}}{H}$$

Plan

Loi de Hencky – von Mises

- Hypothèse de *chargement simple*
  «Le chargement extérieur en termes de contraintes croît proportionnellement à un seul paramètre scalaire k, à partir d'un état initial non écroui ($0 \leqslant k \leqslant 1$)»

$$\underset{\sim}{\sigma} = k\,\underset{\sim}{\sigma}_M \qquad \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \dot{k}\,\underset{\sim}{\sigma}_M \qquad \underset{\sim}{s} = k\,\underset{\sim}{s}_M \qquad J = k\,J_M \qquad \sigma_y = k_e J_M$$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M}{J_M} \qquad \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M}{J_M} : \frac{\underset{\sim}{\sigma}_M \dot{k}}{H} = \frac{J_M\,\dot{k}}{H}$$

- Pas de couplage entre les composantes

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \left(\frac{J_M \dot{k}}{H}\right)\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M}{J_M} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M \dot{k}}{H}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^p(k) = \int_{k_e}^{k} \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M}{H}\,d\kappa = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}_M}{H}(k - k_e)$$

Plan

Loi de Prager (1/2)

- Critère de von Mises et écrouissage cinématique

$$f(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{X}) = J(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X})-\sigma_y \qquad J(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X}) = ((3/2)(\underset{\sim}{s}-\underset{\sim}{X}):(\underset{\sim}{s}-\underset{\sim}{X}))^{0,5}$$

- On pose

$$\underset{\sim}{X} = (2/3)H\underset{\sim}{\varepsilon}^p$$

- Utilisation de la condition de cohérence :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}:\dot{\underset{\sim}{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{X}}:\dot{\underset{\sim}{X}}=0 \qquad \underset{\sim}{n}:\dot{\underset{\sim}{\sigma}}-\underset{\sim}{n}:\dot{\underset{\sim}{X}}=0 \qquad \underset{\sim}{n}=\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}-\underset{\sim}{X}}{J(\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{X})}$$

- On trouve donc le multiplicateur plastique

$$\underset{\sim}{n}:\dot{\underset{\sim}{\sigma}}=\underset{\sim}{n}:\dot{\underset{\sim}{X}}=\underset{\sim}{n}:\frac{2}{3}H\dot{\lambda}\underset{\sim}{n}=H\dot{\lambda} \qquad \dot{\lambda}=(\underset{\sim}{n}:\dot{\underset{\sim}{\sigma}})/H$$

Loi de Prager (2/2)

- Même expression formelle qu'en écrouissage isotrope, mais $\underset{\sim}{n}$ est différent

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H}\,\underset{\sim}{n} \qquad \underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3}{2}\,\frac{\underset{\sim}{s} - \underset{\sim}{X}}{J(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{X})}$$

- Sous chargement uniaxial, on pose

$$\sigma = \sigma_{11} \qquad X = (3/2)X_{11}$$

- On obtient

$$J(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{X}) = |\sigma - X| \qquad n_{11} = \frac{3}{2}\,\frac{s_{11} - X_{11}}{J} = signe(\sigma - X)$$

$$|\sigma - X| = \sigma_y \qquad \dot{\sigma} = \dot{X} = H\dot{\varepsilon}^p$$

Plan

Ecoulement à vitesse de déformation totale imposée

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\approx}{\Lambda} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = H\dot{p}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{H + \underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\approx}{\Lambda} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) = \left(\underset{\approx}{\Lambda} - \frac{(\underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}) \otimes (\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda})}{H + \underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}} \right) : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$$

Élasticité isotrope et matériau de von Mises :

$$\dot{\lambda} = \frac{2\mu \, \underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{H + 3\mu}$$

Synthèse

- Expression 3D de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H}\,\underset{\sim}{n}$$

- Direction d'écoulement

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

- Intensité de l'écoulement

$$\dot{\lambda} = \dot{p} = \frac{\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}}{H}$$