TUNNEL DANS DU SABLE SEC

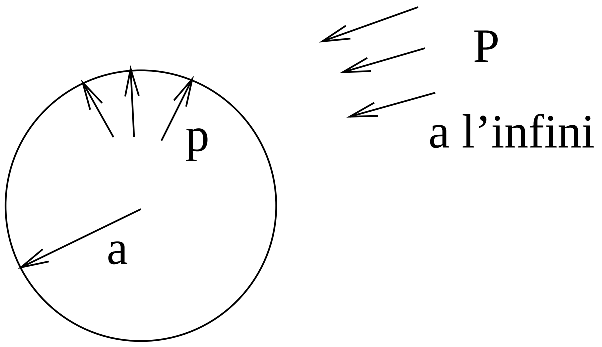

Figure 1 : Géométrie du tunnel et chargement appliqué

Données

Le tunnel (cylindre de rayon a) est creusé dans un massif infini ($r \in [a, +\infty[$), initialement sous contraintes homogènes et isotropes $\underset{\sim}{\sigma}^I = -P\underset{\sim}{\mathbf{I}}$ où P est la pression à l'infini (pression géostatique due au poids des terrains) (Fig. 1).

Le matériau est isotrope parfait de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν obéissant au critère de Coulomb $F(\underset{\sim}{\sigma}) = K\max_i(\sigma_i) - \min_i(\sigma_i)$ avec $K = \tan^2(\pi/4 + \phi/2)$ où ϕ est l'angle de frottement (milieu pulvérulent sec sans cohésion).

Au fur et à mesure de l'avancement du tunnel, un soutènement (exemple : voûte en béton) est posé de sorte que le calcul de l'état final du sol entourant le tunnel puisse se faire en simulant une pression à la paroi ($r = a$) qui décroît progressivement de P (pression initiale des terrains) à p (pression de soutènement) : $p \leq P$).

Les calculs sont à faire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) en admettant que le tunnel est infini dans la direction de son axe Oz (déformations planes : $\varepsilon_z = 0$).

De plus on ne considérera que la situation où $p \leq (1-2\nu)P/[K - \nu(K+1)]$, conduisant à un régime de contrainte tel qu'en tout point du massif on ait les inégalités strictes $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta$. Ainsi, si le potentiel plastique est lui-même Coulombien ($\beta\max_i\sigma_i - \min_i\sigma_i$), les déformations plastiques auront comme vitesses :

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \beta\dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\varepsilon}_z^p = 0 \quad \dot{\varepsilon}_\theta^p = -\dot{\lambda}$$

Le coefficient de gonflement $\beta = \tan^2(\pi/4 + \psi/2)$ où ψ est l'angle de dilatance est tel que : $1 < \beta \leq K$.

1. **Réponse élastique**

   Pour une pression de soutènement p assez grande, la réponse du massif est élastique ($\underset{\sim}{\varepsilon}^p = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$). Déterminer les contraintes dans ce cas.
   Remarquer que la contrainte axiale reste constante ($\sigma_z = -P$) tandis que et que les contraintes radiale σ_r et circonférentielle σ_θ restent des pressions (≤ 0) mais que la pression radiale baisse et que la pression circonférentielle augmente (suite au mouvement convergent du sol).
   Déterminer la pression minimale p_e que doit assurer le soutènement pour que cette solution élastique reste vraie ($p \geq p_e$).
   Remarquer que p_e n'est pas nul (un soutènement est obligatoire) pour tout $P > 0$.
   Pour $P < p_e$ la solution élastique est fausse car le critère $F = K\sigma_r - \sigma_\theta$ est positif dans une zone $r \in [a, c_e]$ entourant le tunnel.
   Calculer c_e en fonction de (p/p_e).

   On note respectivement :

$u(r)$	déplacement radial
$\varepsilon_r = u' = \partial u/\partial r$	déformation radiale
$\varepsilon_\theta = u/r$	déformation circonférentielle
$\varepsilon_z = 0$	déformation axiale

Les conditions de compatibilité et les lois d'élasticité fournissent :

$$\varepsilon_r = r\varepsilon'_\theta + \varepsilon_\theta$$

$$E\varepsilon_z = (1+\nu)(\sigma_z + P) - \nu(\sigma_r + P + \sigma_\theta + P + \sigma_z + P)$$

et

$$\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z + P = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta + 2P)$$

$$\boxed{\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - (1-2\nu)P}$$

$$E\varepsilon_r = (1+\nu)(\sigma_r + P) - \nu(\sigma_r + P + \sigma_\theta + P + \sigma_z + P)$$

$$E\varepsilon_\theta = (1+\nu)(\sigma_\theta + P) - \nu(\sigma_r + P + \sigma_\theta + P + \sigma_z + P)$$

D'où :

$$E(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = (1+\nu)(\sigma_r - \sigma_\theta)$$

et :

$$E(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = (1+\nu)(1-2\nu)(\sigma_r + \sigma_\theta + 2P)$$

L'équation d'équilibre est :

$$r\sigma'_r + \sigma_r - \sigma_\theta = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_r(a) = -p \quad \text{et} \quad \sigma_r(+\infty) = -P$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = -P + (P-p)(a/r)^2 \\
&\sigma_z = -P \\
&\sigma_\theta = -P - (P-p)(a/r)^2 \\
&\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta \quad \text{pour } r \text{ fini et } p < P
\end{aligned}$$

($-\sigma_r$) est une pression qui varie de p (pour $r = a$, c'est-à-dire à la paroi du tunnel) à P (pour $r = +\infty$).

($-\sigma_\theta$) est une pression qui varie de $P + (P-p)$ (pour $r = a$) à P (pour $r = +\infty$).

($-\sigma_z$) est une pression uniforme P (égale donc à sa valeur initiale).

Le déplacement radial est tel que :

$$\varepsilon_\theta = u/r = -[(P-p)/(2\mu)](a/r^2)$$

avec $2\mu = E/(1+\nu)$; μ= module de cisaillement. Il s'agit donc d'un mouvement convergent (la matière est attirée par le vide) et en particulier la diminution relative du rayon du tunnel est :

$$\boxed{-u(a)/a = (P-p)/2\mu}$$

Le critère est $F = K\sigma_r - \sigma_\theta$

$F = (K+1)(P-p)(a/r)^2 - (K-1)P$: fonction décroissante de r

Pour rester en élasticité, il faut et il suffit que $F \leq 0$ pour $r = a$. D'où :

$$(K+1)(P-p) - (K-1)P \leq 0$$

La pression P doit rester supérieure à la valeur limite p_e.

$$\boxed{p_e = 2P/(K+1)}$$

Lorsque $p > p_e$, la solution élastique devient fausse (car $F > 0$ pour $r = a$ par exemple). Mais on peut être tenté d'utiliser l'expression de F pour déterminer une valeur approchée de l'épaisseur $(c_e - a)$ de la zone plastique ($r \in [a, c_e]$ dans laquelle $F > 0$). On obtient :

$$c_e = a[1 + 2(1 - p/p_e)/(K-1)]^{1/2}$$

En particulier pour $p = p_e$ on a $c_e = a$ (début de la plastification et donc fin de la phase élastique).

2. **La vraie zone plastique**
Lorsque $p < p_e$ calculer les contraintes dans la zone plastique

$r \in [a, c]$ et dans la zone élastique $r \in [c, +\infty[$ sachant que $F = 0$ pour $r = c$. Déterminer c en écrivant la condition de continuité (équilibre) de la contrainte radiale à l'interface $r = c$ des deux zones.
En déduire que $c \geq c_e$. Autrement dit la solution fausse (élastique) sous-estime l'épaisseur de la zone plastifiée (endommagée) donc ne peut pas servir comme règle de trois de l'ingénieur pour des raisons de sécurité.
Nous inspirant de la solution élastique, nous cherchons la solution élastoplastique telle que :

$*$ Il existe un rayon c (à déterminer) vérifiant :
 $r \in [c, +\infty[$: solution élastique avec $F = 0$ pour $r = c$.
 $r \in [a, c]$: zone plastique dans laquelle $F = 0$.

$*$ $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta$

Dans la zone élastique, il suffit de reprendre la solution du chapitre 1 en remplaçant a par c et p par p_e :

$$\text{Si } r \geq c: \quad \begin{aligned} &\sigma_r = -P + (P - p_e)(c/r)^2 \\ &\sigma_z = -P \\ &\sigma_\theta = -P - (P - p_e)(c/r)^2 \\ &\varepsilon_\theta = u/r = -[(P - p_e)/2\mu](c/r)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } a \leq r \leq c: \quad \begin{aligned} &F = K\sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad \Rightarrow \sigma_\theta = K\sigma_r \\ &r\sigma_r' + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad \Rightarrow \sigma_r' = (K-1)/r \\ &\text{donc } [\ln(\sigma_r/(-p))]' = [(K-1)\ln(r/a)]' \\ &\text{et } \sigma_r = -p(r/a)^{(k-1)} \end{aligned}$$

Les lois d'écoulement sont telles que $\varepsilon_z^p = 0$.
Donc la relation $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - (1 - 2\nu)P$ reste vraie, si bien que :

$$\sigma_z = -(1 - 2\nu)P - \nu(K + 1)p(r/a)^{(k-1)}$$

A l'interface ($r = c$) entre les deux zones, la seule contrainte qui est nécessairement continue est la contrainte radiale qui vaut :

– à gauche ($r = c^-$) $\quad \sigma_r = -p(c/a)^{(k-1)}$
– à droite ($r = c^+$) $\quad \sigma_r = -p_e$

D'où : $c = a(p_e/p)^{1/(k-1)}$
En posant $x = p_e/p$ variant de 1 à $+\infty$, les deux fonctions croissantes de x, $c_e = c_e(x)$ et $c = c(x)$ sont représentées par des courbes partant du même point ($x = 1$ et $c_e = c = a$) avec la même tangente mais très vite c devient plus grand que c_e montrant que cette dernière valeur conduit à sous-estimer la vraie zone plastique.

3. **La courbe caractéristique du massif**
Lorsqu'on utilise les lois d'écoulement (le coefficient β) on peut

calculer le déplacement radial $u(r)$ et en particulier la diminution relative du rayon du tunnel $[-u(a)/a]$. En portant cette quantité en abscisse et la pression de soutènement p en ordonnée, on obtient ce que l'on appelle en génie civil, la courbe réponse caractéristique du massif.

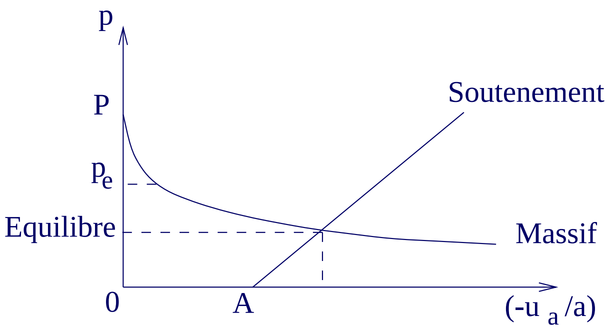

Figure 2 : Courbe convergence–confinement d'un tunnel

La réponse du soutènement (sans contraintes initiales) posé après que le tunnel ait déjà subi une certaine déformation (point A) est utilisée pour obtenir l'état final d'équilibre (point d'intersection des deux courbes) et juger si la pression d'équilibre est assez faible pour être supportée par le soutènement.

Cette méthode (convergence-confinement) montre clairement que si le soutènement est posé tôt (point A proche de l'origine), les déplacements du terrain, et donc son endommagement, seront réduits mais le soutènement sera très chargé et inversement. Il y a un juste compromis à trouver.

Pour $p < p_e$, dans la zone élastique les déplacements sont déjà déterminés. Pour calculer dans la zone plastique on élimine les déformations plastiques en formant l'expression de $\varepsilon_r + \beta\varepsilon_\theta$, car $\varepsilon_r^p + \beta\varepsilon_\theta^p = 0$. D'où :

$E(\varepsilon_r + \beta\varepsilon_\theta) = (1+\nu)[\sigma_r + P + \beta(\sigma_\theta + P)] -$
$\nu(1+\beta)(\sigma_r + P + \sigma_\theta + P)(1+\nu)$

En utilisant la relation de compatibilité $\varepsilon_r = r\varepsilon_\theta' + \varepsilon_\theta$ et les expressions des contraintes déjà déterminées dans la zone plastique, on obtient pour ε_θ une équation du premier ordre que l'on intègre en tenant compte du fait que ε_θ pour $r = c$ est connu (continuité du déplacement à l'interface des deux zones).

On obtient ainsi l'expression de $\varepsilon_\theta = u/r$ en fonction de r et de p. En particulier pour $r = a$ (à la paroi du tunnel), la convergence $(-u(a)/a)$ est reliée à la pression de soutènement p (confinement) par une relation non linéaire qui n'est valable que pour $p \leq p_e$ mais qui peut être complétée par celle obtenue en élasticité ($p \geq p_e$).

Ainsi, dans le diagramme convergence (en abscisse), confinement (en ordonnée) on obtient une courbe descendante à concavité vers le haut commençant par une portion de droite (phase élastique) et présentant une asymptote ($p = 0$ pour $-u(a)/a$ tendant vers l'infini). Cette asymptote traduit simplement le fait qu'il est impossible de concevoir un tunnel dans du sable sec sans soutènement ($p = 0$).