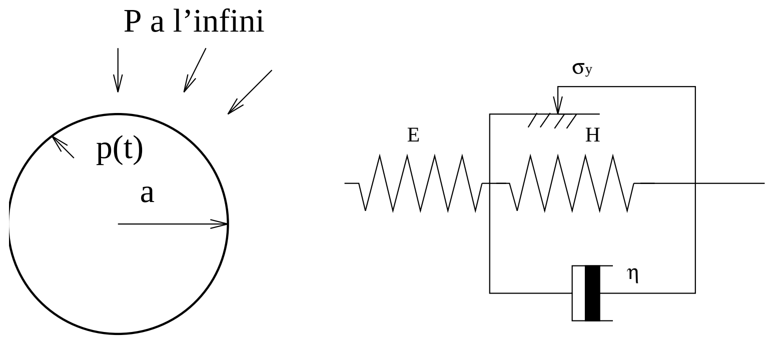
CAVITÉ SPHÉRIQUE DANS UN MASSIF INFINI ÉLASTOVISCOPLASTIQUE



Géométrie et matériau considéré

Une cavité sphérique de rayon a (définie en coordonnées sphériques r, θ, φ, par $r \in [a, +\infty[$) est creusée instantanément ($p(t) = P$ pour $t < 0$ et $p(t) = 0$ pour $t \geq 0$ où t est le temps) dans un massif infini initialement sous contraintes homogènes et isotropes : $\underset{\sim}{\sigma}(r, t=0) = -P\underset{\sim}{\mathbf{I}}$ où P est la pression à l'infini (Figure ci-dessus). Le matériau est un matériau viscoplastique de Bingham tel que :

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^e = \frac{1}{E}[(1+\nu)\underset{\sim}{\mathbf{S}} - \nu \mathrm{trace}(\underset{\sim}{\mathbf{S}})\underset{\sim}{\mathbf{I}}] \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\mathbf{S}} = \underset{\sim}{\sigma} - (-P\underset{\sim}{\mathbf{I}})$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{s}}}{J}\frac{< J - \sigma_y >}{\eta}$$

$$\text{avec} \quad \underset{\sim}{\mathbf{s}} = \underset{\sim}{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}\mathrm{trace}(\underset{\sim}{\mathbf{S}})\underset{\sim}{\mathbf{I}} \quad \text{et} \quad J = ((3/2)s_{ij} : s_{ij})^{1/2}$$

E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, σ_y la limite d'élasticité et $C = \sigma_y/2$ la cohésion ; η désigne le module de viscosité. On appelle constante de temps du matériau la quantité $\alpha = E/2(1-\nu)\eta$. On suppose dans la suite que la pression géostatique P est telle que $P > 2\sigma_y/3$.

1. Mise en équations

1.1. **Inconnues principales** : Compte tenu de la symétrie du problème on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ). Par ailleurs, le changement de variable $\rho = (r/a)^3$ s'avère utile :

$$r = a\rho^{1/3} \quad \text{avec} \quad \rho \in [1, +\infty[\tag{1}$$

La paroi de la cavité correspond à $\rho = 1$. L'unique composante non nulle du vecteur déplacement est $u_r = u(\rho, t)$ fonction de la variable d'espace ρ et du temps réel t. Les déformations totales non nulles sont la déformation circonférentielle $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = u/r$ et la déformation radiale $\varepsilon_r = u_{,r}$; d'où :

$$u = r\varepsilon_\theta \tag{2}$$

et, comme $r\dfrac{\partial}{\partial r} = 3\rho\dfrac{\partial}{\partial \rho}$:

$$\varepsilon_r = 3\rho\varepsilon_{\theta,\rho} + \varepsilon_\theta \tag{3}$$

En ce qui concerne les contraintes σ_r (radiale) et $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ (orthoradiales) l'état de référence (pour $t < 0$) est caractérisé par : $\sigma_r(\rho, t) = \sigma_\theta(\rho, t) = -P$.
Les variations des contraintes sont : $S_r = \sigma_r + P$ et $S_\theta = \sigma_\theta + P$, d'où :

$$\sigma_r = S_r - P \tag{4}$$

$$\sigma_\theta = S_\theta - P \tag{5}$$

L'équation d'équilibre, $\sigma_{r,r} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0$ devient alors :
$\sigma_\theta = (1/2)rS_{r,r} + S_r$ ou encore :

$$S_\theta = (3/2)\rho S_{r,\rho} + S_r \tag{6}$$

Par ailleurs : $\text{trace}(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) = 0$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}^p(\rho, 0) = 0$, donc : $\text{trace}(\underset{\sim}{\varepsilon}^p) = 0$, et : $\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p = 0$, soit :

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_r^p/2 \tag{7}$$

Il nous reste donc en tout trois inconnues principales qui sont ε_θ, S_r et ε_r^p. Les relations (2) à (7) permettent de déterminer aisément toutes les autres inconnues.

1.2. Loi de comportement : La décomposition des déformations totales en partie élastique et partie non élastique s'écrit :

$$\varepsilon_r = [(1+\nu)S_r - \nu(S_r + 2S_\theta)]/E + \varepsilon_r^p$$

$$\varepsilon_\theta = [(1+\nu)S_\theta - \nu(S_r + 2S_\theta)]/E + \varepsilon_\theta^p$$

On peut aussi, et c'est plus avantageux, combiner ces deux équations pour en déduire deux relations dont l'une utilise la trace et l'autre le déviateur (en utilisant $\text{trace}(\underset{\sim}{\varepsilon}^p) = 0$) :

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = (1-2\nu)(S_r + 2S_\theta)/E$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = (1+\nu)(S_r - S_\theta)/E + \varepsilon_r^p - \varepsilon_\theta^p$$

En remplaçant ε_r, S_θ et ε_θ^p par leurs expressions (3, 6 et 7) :

$$3\rho\varepsilon_{\theta,\rho} + 3\varepsilon_\theta = (1-2\nu)(3\rho S_{r,\rho} + 3S_r)/E$$

$$3\rho\varepsilon_{\theta,\rho} = -3[(1+\nu)/2]pS_{r,\rho}/E + (3/2)\varepsilon_r^p.$$

La première relation devient :

$$[\rho\varepsilon_\theta - \rho(1-2\nu)S_r/E], \rho = 0$$

Donc $[\rho\varepsilon_\theta - (1-2\nu)S_r/E]$ est une fonction du temps t seul que l'on choisit sous la forme :

$$-[(1+\nu)/(2E) + (1-2\nu)/E]A(t)$$

d'où :

$$\varepsilon_\theta = [(1-2\nu)/E]S_r - [(1+\nu)/(2E) + (1-2\nu)/E]A(t)/\rho$$

En particulier :

$$\varepsilon_\theta + [(1+\nu)/(2E)]S_r = [(1+\nu)/(2E) + (1-2\nu)/E](S_r - A/\rho)$$

Ainsi, les deux dernières relations deviennent, en posant $2\mu = E/(1+\nu)$
(μ module de cisaillement) :

$$\varepsilon_\theta = -S_r/(4\mu) + (3/2)[(1-\nu)/E][S_r - A(t)/\rho] \tag{8}$$

$$[S_r - A(t)/\rho]_{,\rho} = (2/3)\alpha\eta\varepsilon_r^p/\rho \tag{9}$$

1.3. Loi d'évolution : le critère est $F(\underset{\sim}{\sigma}) = |\sigma_r - \sigma_\theta| - \sigma_y$ ou encore $F = |S_r - S_\theta| - \sigma_y$. Nous verrons que la solution est telle que $S_r \geq S_\theta$. Pour le moment, il s'agit d'une hypothèse :

$$S_{r,\rho} \leq 0 \quad \text{à vérifier } \textit{a posteriori} \tag{10}$$

Alors : $F = S_r - S_\theta - \sigma_y$, soit :

$$F = -(3/2)\rho S_{r,\rho} - \sigma_y \tag{11}$$

Par ailleurs : $S_r' = (2/3)(S_r - S_\theta)$ et : $J = S_r - S_\theta$. D'où :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_r^p = < F > /\eta \tag{12}$$

1. *Réponse instantanée Lorsque les contraintes subissent un saut (c'est le cas ici à l'instant $t = 0$), il s'ensuit une discontinuité dans le temps (saut) pour les déformations totales. En revanche, les déformations viscoplastiques demeurent nulles car leur vitesse est finie (loi d'évolution). La réponse instantanée du massif est donc élastique. La déterminer, et en déduire qu'instantanément (à $t = 0$) il apparaît une zone plastique (dans laquelle la vitesse $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$ est non nulle), d'épaisseur finie si σ_y est strictement positive, et s'étendant à tout le massif lorsque la cohésion est nulle ($\sigma_y = 0$).*

   Le plus gros du travail est fait. En effet lorsque la réponse est élastique ($\varepsilon_r^p = 0$), la relation (9) devient :

$$S_r - A(0)/\rho = B(t)$$

   La constante d'intégration est nulle car $S_r(+\infty, 0) = 0$. Il vient successivement : $S_r(\rho, 0) = A(0)/\rho$, puis : $S_r(1, 0) = P$, d'où :

$$A(0) = P \quad \text{et} \quad S_r(\rho, 0) = P/\rho$$

   L'inégalité (10) est bien vérifiée : $S_{r,\rho} = -P/\rho^2$ (dérivée partielle négative), et : $F = (3/2)P/\rho - \sigma_y$.
   2.1. Cas où $\sigma_y > 0$: On pose : $\gamma_0 = P/(2\sigma_y/3) > 1$
   – Pour $\rho \geq \gamma_0$ on a $F \leq 0$ donc , d'après (12) : $\dot{\varepsilon}_r^p = 0$ (zone élastique).
   – Pour $\rho < \gamma_0$ on a : $\dot{\varepsilon}_r^p = (3/2)P/\rho - \sigma_y > 0$. Le rayon de la zone viscoplastique à l'instant 0 est donc : $C_0 = a\gamma_0^{1/3}$,
   d'où : $C_0 = a[P/(2\sigma_y/3)]^{1/3}$.
   2.2. Cas où $\sigma_y = 0$: $F = (3/2)P/\rho$ est partout positif, donc tout le massif rentre instantanément en viscoplasticité ($\dot{\varepsilon}_r^p > 0$).

2. *Evolution dans le cas σ_y = 0*
   Montrer que les contraintes demeurent constantes en tout point du massif (fluage) et que les déformations évoluent linéairement avec le temps.

Remarque
a. Même dans un liquide ($\sigma_y = 0$) on peut faire un trou.
b. Aussi bien le caractère fluage que l'évolution linéaire sont particuliers à ce matériau. Si on prenait par exemple le modèle de Norton (en élevant $< J - \sigma_y >$ à une puissance réelle) on aurait un phénomène non linéaire et complexe dans lequel les contraintes aussi varient dans le temps.

Les équations (11) et (12) deviennent respectivement :

$$F = (-3/2)\rho S_{r,\rho} \geq 0$$

$$\dot{\varepsilon}_r^p = (-3/2)\rho S_{r,\rho}/\eta$$

Quant à (9), elle donne, après dérivation par rapport au temps :

$$[\dot{S}_r - \dot{A}(t)/\rho]_{,\rho} = -\alpha S_{r,\rho}$$

Donc : $\dot{S}_r + \alpha S_r - \dot{A}(t)/\rho = D(t)$. La constante d'intégration D est nulle car lorsque ρ tend vers l'infini, on a $S_r = 0$ et $\dot{S}_r = 0$. D'où : $\dot{S}_r + \alpha S_r = \dot{A}(t)/\rho$. Pour $\rho = 1$, on a $S_r = P$ et $\dot{S}_r = 0$, si bien que :

$$\dot{A}(t) = \alpha P \Rightarrow A(t) = P\alpha t + A(0)$$

Comme $A(0) = P$ (paragraphe 2), on obtient $A(t) = P(1 + \alpha t)$, et :

$$\dot{S}_r + \alpha(S_r - P/\rho) = 0 \ \text{ avec } \ S_r(\rho, 0) = P/\rho$$

D'où l'expression de S_r, constante dans le temps :

$$S_r(\rho, t) = P/\rho$$

On trouve donc : $S_r - A/\rho = -(P/\rho)\alpha t$, et, d'après (8) :

$$\varepsilon_\theta = -[1/4\mu + (3/2)[(1-\nu)/E]\alpha t](P/\rho)$$

Le fluage est linéaire : la variation relative du rayon de la cavité $\varepsilon_\theta(1,t)$ est négative et son intensité augmente linéairement avec le temps conduisant à une fermeture totale au bout d'un temps fini. ATTENTION : Il convient de ne garder de ce résultat que le caractère qualitatif (dans un "liquide visqueux" un trou évolue inexorablement vers la fermeture). En revanche l'aspect quantitatif est une extrapolation dangereuse, car le calcul n'est valable qu'en petite déformation. L'analyse quantitative de la fermeture réelle de la cavité ne peut se faire que dans le cadre des transformations finies.

3. *Réponse asymptotique dans le cas* $\sigma_y > 0$

L'étude de l'évolution dans la situation $\sigma_y > 0$ *conduit à une*

équation différentielle dans le temps dont la solution fait intervenir l'exponentielle intégrale (primitive de $\exp(x)/x$*). C'est pourquoi ici, on se contentera de déterminer la réponse du matériau lorsque* t *tend vers l'infini (état asymptotique) en montrant qu'il se détermine en résolvant un problème d'élastoplasticité relatif au matériau de von Mises parfait et standard associé à la limite d'élasticité* σ_y*.*

On en déduit donc que dans un matériau élastoviscoplastique on peut toujours faire un trou. Cependant, dans le cas où la cohésion est nulle, le trou finit par se fermer, alors que, dans le cas d'un matériau cohérent, la fermeture du trou (convergence) finit par se stabiliser avec une valeur maximale (en intensité) finie qui peut être déterminée par un calcul élastoplastique.

L'état asymptotique $(t = +\infty)$ correspond à $\dot{\varepsilon}^p = 0$, donc $F = 0$ dans la zone plastique $\rho \in [1, \gamma_\infty[$ et $F < 0$ dans la zone élastique $\rho \in]\gamma_\infty, +\infty[$.

Dans la zone élastique, on a $\varepsilon_r^p = 0$, et donc, d'après (9) et le fait que $S_r = 0$ pour $\rho = +\infty$ on obtient :

$$S_r(\rho, +\infty) = A(+\infty)\rho$$

Le critère est $F = -(3/2)\rho S_{r,\rho} - \sigma_y = (3/2)A_\infty/\rho - \sigma_y$. Or, pour $\rho = \gamma_\infty$, on a $F = 0$, donc : $A_\infty = (2/3)\sigma_y\gamma_\infty$. D'où :

$$\text{si } \rho \in [\gamma_\infty, +\infty[\,:\; S_r(\rho, +\infty) = (2/3)\sigma_y\gamma_\infty/\rho$$

Dans la zone plastique, on a $F = 0$, donc, comme $S_r(1, +\infty) = P$:

$$S_r = -(2/3)\sigma_y \ln(\rho) + P$$

Ainsi :

$$\text{si} \quad \rho \in [1, \gamma_\infty] \;:\; S_r(\rho, +\infty) = (2/3)\sigma_y \ln(\rho) + P$$

La continuité de la contrainte radiale (équilibre) en $\rho = \gamma_\infty$ conduit à :

$$-(2/3)\sigma_y \ln(\gamma_\infty) + P = (2/3)\sigma_y\gamma_\infty/\gamma_\infty$$

D'où :

$$\gamma_\infty = \exp(P/(2\sigma_y/3) - 1)$$

Connaissant γ_∞ (donc A_∞) et connaissant S_r, les relations (8) et (9) fournissent les déformations ε_θ et ε_r^p. En particulier la fermeture de la cavité (même au bout d'un temps infini) reste bornée par la valeur ainsi trouvée en tant que solution d'un simple problème d'élastoplasticité. Cependant, ces résultats ne peuvent pas être utilisés pour un "liquide visqueux" (cohésion nulle) car en faisant tendre σ_y vers zéro on obtient $\gamma_0 \to \infty, \gamma_\infty \to \infty$, et $S_r = P$ (incompatible avec la condition à la limite $S_r(\rho = +\infty) = 0$) et de plus $A_\infty \to \infty$ conduit à des déformations infinies.