TRACTION-CISAILLEMENT SUR UN ELEMENT DE VOLUME PARFAITEMENT PLASTIQUE

On considère un élément de volume constitué d'un matériau élastique-parfaitement plastique, qui vérifie le critère de von Mises, avec une limite d'élasticité σ_y : $f(\underset{\sim}{\sigma}) = J - \sigma_y$, avec $J(\underset{\sim}{\sigma}) = ((3/2)\underset{\sim}{\mathbf{s}} : \underset{\sim}{\mathbf{s}})^{1/2}$. L'élasticité est isotrope, on introduit donc classiquement le module de Young E, le module de cisaillement μ, et le coefficient de Poisson ν.

1. On examine un élément de volume isolé en traction–cisaillement, en déformation imposée : on suppose donc que $\dot{\varepsilon}_{11}$ et $\dot{\varepsilon}_{12}$ sont connus et constants pendant le chargement. Le matériau est toujours élastique parfaitement plastique.

Ecrire les équations de décomposition de déformation en déformation élastique et plastique sur chaque composante, ainsi que la condition de cohérence, et en déduire le système général en $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{12}$, et $\dot{p}$ qui permet de résoudre le problème de l'écoulement plastique.

Le chargement imposé est de la forme :

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} := \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{12} & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

On a les expressions suivantes pour le tenseur de contraintes et son déviateur :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}/3 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -\sigma_{11}/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{11}/3 \end{pmatrix}$$

Durant l'écoulement plastique, la valeur du critère de von Mises est constante, donc $\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2} = \sigma_y$. On en déduit la direction d'écoulement :

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{s}}}{J} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}/\sigma_y & 3\sigma_{12}/2\sigma_y & 0 \\ 3\sigma_{12}/2\sigma_y & -\sigma_{11}/2\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{11}/2\sigma_y \end{pmatrix}$$

Comme on le sait, le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est égal à la vitesse de déformation cumulée lorsqu'on utilise le critère de von Mises, ($\dot{\lambda} = \dot{p} = \sqrt{(2/3)\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p}$), si bien que la vitesse de déformation plastique s'écrit $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{p}\underset{\sim}{\mathbf{n}}$.

La décomposition des vitesses de déformations entre déformation élastique et déformation plastique, donne :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\dot{\sigma}_{11}}{E} + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_y}\dot{p}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{\dot{\sigma}_{12}}{2\mu} + \frac{3\sigma_{12}}{2\sigma_y}\dot{p}$$

La condition de cohérence doit indiquer le fait que le second invariant de von Mises reste constant pendant l'écoulement, $\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_y^2$, ce qui donne en termes de vitesses :

$$\sigma_{11}\dot{\sigma}_{11} + 3\sigma_{12}\dot{\sigma}_{12} = 0$$

Cette dernière équation, regroupée avec les deux précédentes, forme le système permettant de résoudre le problème d'écoulement, pour les variables σ_{11}, σ_{12} et p.

2. Pour une valeur k du rapport $\dot{\varepsilon}_{12}/\dot{\varepsilon}_{11}$, donner la valeur du rapport σ_{12}/σ_{11} à plasticité commençante. Quelle est la valeur du rapport $\dot{\varepsilon}^p_{12}/\dot{\varepsilon}^p_{11}$

en ce point ? En déduire le mouvement du point courant en contrainte sur la surface de charge.

En élasticité, on a simplement :

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} = \frac{2\mu\varepsilon_{12}}{E\varepsilon_{11}} = \frac{2\mu}{E}k = \frac{k}{1+\nu}$$

Pour un tel rapport de contrainte, lorsque le point représentatif du chargement rencontre la surface de charge, le rapport des vitesses d'écoulement plastique est :

$$\frac{\dot{\varepsilon}^p_{12}}{\dot{\varepsilon}^p_{11}} = \frac{n_{12}}{n_{11}} = \frac{3\sigma_{12}}{2\sigma_{11}} = \frac{3k}{2(1+\nu)}$$

Pendant le régime plastique, l'écoulement de cisaillement devient proportionnellement plus important que pendant le régime élastique. Le point représentatif de l'état de contrainte va donc tourner sur la surface de charge, en direction de l'axe de traction, dans la mesure où le supplément d'écoulement plastique en cisaillement va relaxer la contrainte de cisaillement. La direction d'écoulement évolue donc en même temps.

3. Le point de fonctionnement stable en contrainte est obtenu dans les équations en indiquant que les dérivées $\dot{\sigma}_{11}$ et $\dot{\sigma}_{12}$ sont nulles. Indiquer la valeur du rapport σ_{12}/σ_{11} à ce moment. En déduire que le trajet de chargement sera un trajet de chargement simple si et seulement si l'on suppose que l'élasticité s'effectue sans changement de volume.

La direction d'écoulement devient constante lorsque le point représentatif de l'état de contrainte devient fixe sur la surface de charge. On a alors $\dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{12} = 0$, soit :

$$\frac{\dot{\varepsilon}^p_{12}}{\dot{\varepsilon}^p_{11}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{12}}{\dot{\varepsilon}_{11}} = k$$

et :

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} = \frac{2k}{3}$$

En appelant θ_e l'angle auquel la contrainte «aborde» la surface de charge et θ_p l'angle d'équilibre, on a les relations suivantes :

$$\tan(\theta_e) = \frac{k}{1+\nu} \qquad \tan(\theta_p) = \frac{2}{3}k$$

La rotation de normale au cours de l'écoulement plastique se mesure donc par l'angle :

$$\Delta\theta = \theta_e - \theta_p = \theta_e - \operatorname{atan}\left(\frac{2(1+\nu)}{3}\tan(\theta_e)\right)$$

On vérifie que cet angle reste faible (environ 4 degrés par exemple pour $\nu = 0.3$).

On observe finalement qu'il n'y a pas de rotation de normale si le matériau est incompressible ($\nu = 0.5$) : la déformation élastique avant plastification «dépose» la contrainte au point stable sur la surface de charge.

4. On fournit maintenant une application interactive qui permet de régler les composantes de déformation imposées, ε_{11} et ε_{12}, ainsi que le coefficient de Poisson. Le matériau a un module d'élasticité E=200 GPa, et une limite d'élasticité σ_y=800 MPa. Lorsque l'état asymptotique est atteint, on doit avoir $\dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\varepsilon^{max}_{12}}{\varepsilon^{max}_{11}}$

Accès à la feuille de calcul