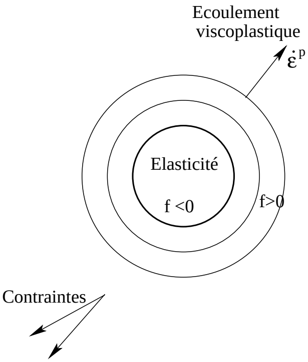


Plasticité/viscoplasticité 3D

Georges Cailletaud

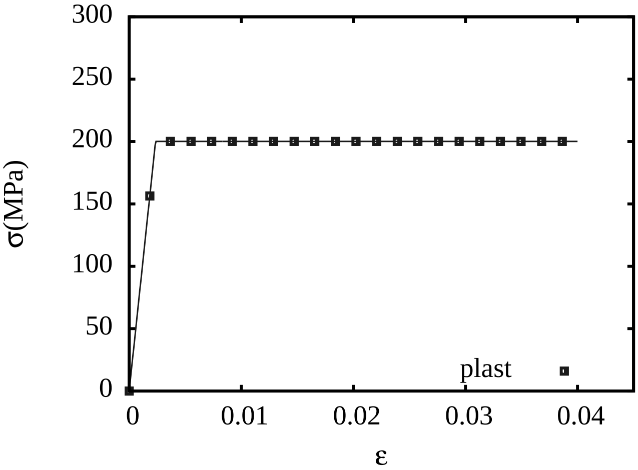
MINES ParisTech
Centre des Matériaux, CNRS UMR 7633

Plan

1. Les ingrédients
2. Ecoulement viscoplastique
3. Ecoulement plastique
   - Plasticité associée
   - Evaluation des directions d'écoulement
   - Modèle parfaitement plastique
4. Synthèse

Rhéologie

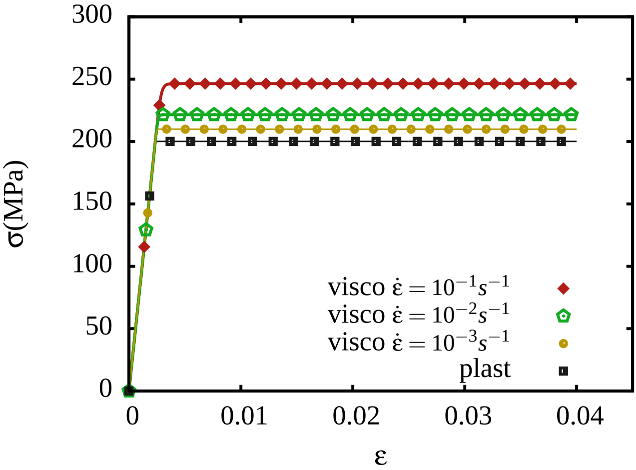
Modèles sans écrouissage



Comportement plastique indépendant du temps

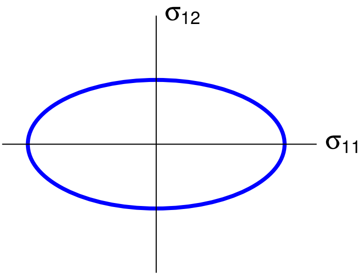
Rhéologie

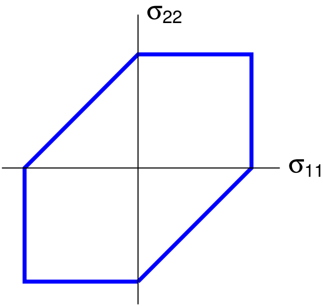
Modèles sans écrouissage



Comportement viscoplastique

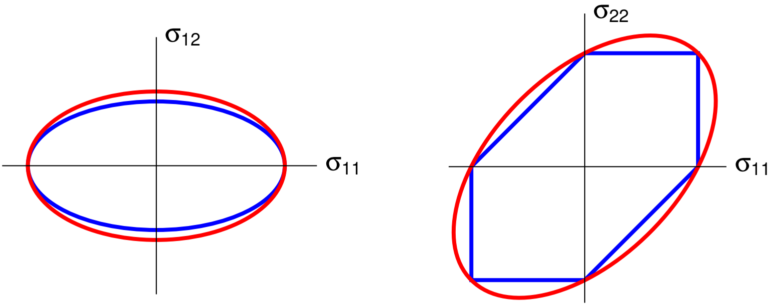
Critères





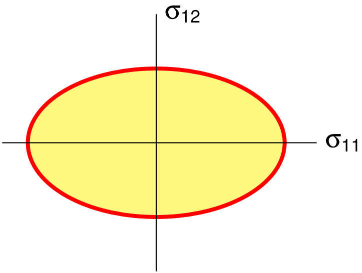
Tresca *von Mises*

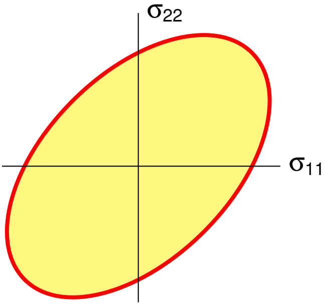
Critères



Tresca *von Mises*

Critères

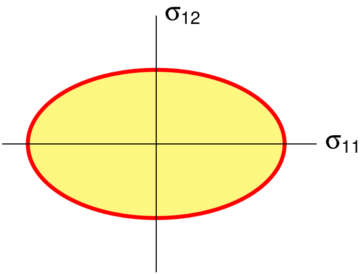


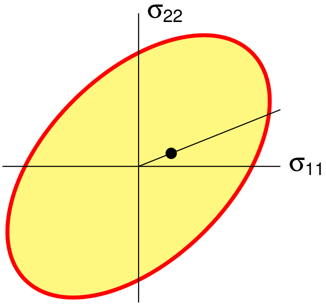


von Mises

Domaine d'élasticité
critère de von Mises

Critères



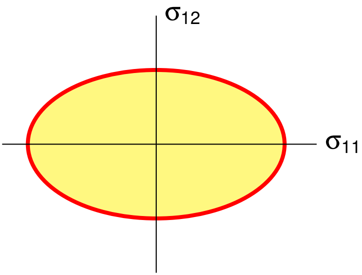


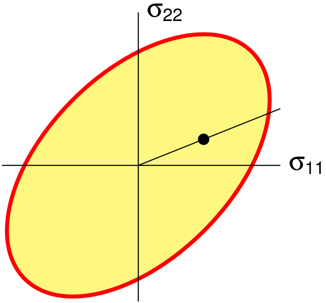
Régime élastique

von Mises

Domaine d'élasticité
critère de von Mises

Critères



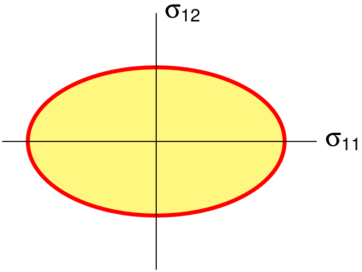


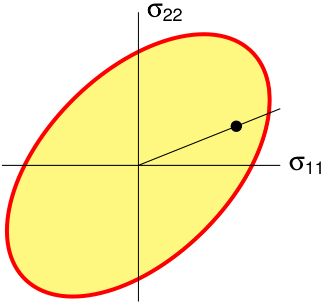
Régime élastique

von Mises

Domaine d'élasticité
critère de von Mises

Critères

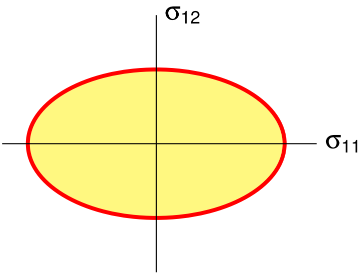


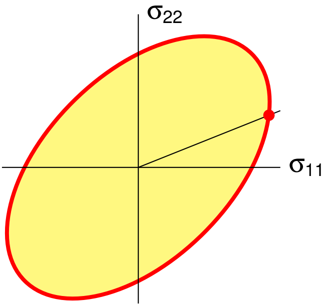


Régime élastique

Domaine d'élasticité
critère de von Mises

Critères





Plasticité

Domaine d'élasticité
critère de von Mises

Equations de la plasticité et de la viscoplasticité 3D

- Décomposition de la déformation

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{e} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{th} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{p} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}$$

- Critère

défini par la fonction $f(\underset{\sim}{\sigma}, A_I)$

- Lois d'écoulement

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \ldots \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \ldots$$ *Cette séance*

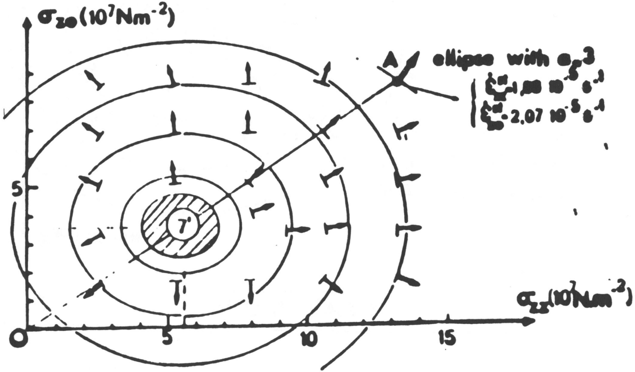
- Lois d'écrouissage

$$\dot{A}_I = \ldots$$ *Prochaine séance*

⋆ Aujourd'hui, modèle sans écrouissage, par exemple :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y$$

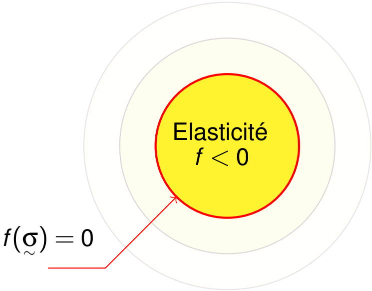
Notion de potentiel



FeCoV – 953K – Oytana, Delobelle, Mermet (Besançon)

Potentiel viscoplastique Ω

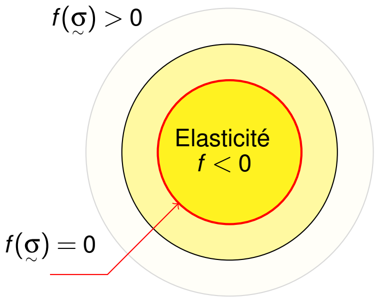
Rice, Mandel, 1972



$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\,\underset{\sim}{n}$$

Potentiel viscoplastique Ω

Rice, Mandel, 1972



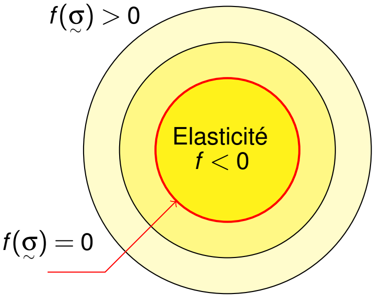
On construit un modèle viscoplastique associé *en utilisant un potentiel viscoplastique qui définit la direction et l'intensité de l'écoulement*

$$\Omega : \underset{\sim}{\sigma} \rightarrow \Omega(f(\underset{\sim}{\sigma}))$$

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\,\underset{\sim}{n}$$

Potentiel viscoplastique Ω

Rice, Mandel, 1972



On construit un modèle viscoplastique associé *en utilisant un potentiel viscoplastique qui définit la direction et l'intensité de l'écoulement*

$$\Omega : \underset{\sim}{\sigma} \rightarrow \Omega(f(\underset{\sim}{\sigma}))$$

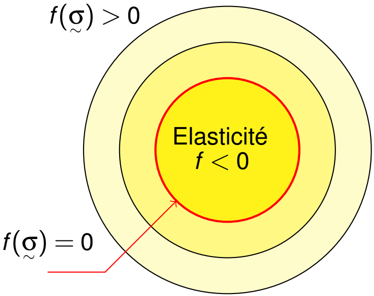
$$\Omega(0) = 0$$

Ω *fonction croissante de f*

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\,\underset{\sim}{n}$$

Potentiel viscoplastique Ω

Rice, Mandel, 1972



On construit un modèle viscoplastique associé *en utilisant un potentiel viscoplastique qui définit la direction et l'intensité de l'écoulement*

$$\Omega : \underset{\sim}{\sigma} \rightarrow \Omega(f(\underset{\sim}{\sigma}))$$

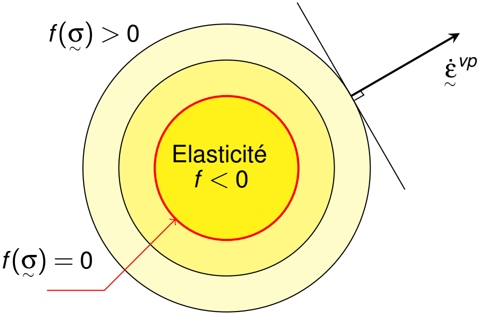
$$\Omega(0) = 0$$

Ω *fonction croissante de f*

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\, \underset{\sim}{n}$$

Potentiel viscoplastique Ω

Rice, Mandel, 1972



On construit un modèle viscoplastique associé *en utilisant un potentiel viscoplastique qui définit la direction et l'intensité de l'écoulement*

$$\Omega : \underset{\sim}{\sigma} \rightarrow \Omega(f(\underset{\sim}{\sigma}))$$

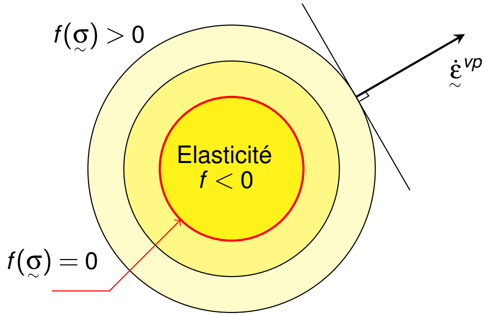
$$\Omega(0) = 0$$

Ω *fonction croissante de f*

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\, \underset{\sim}{n}$$

Potentiel viscoplastique Ω

Rice, Mandel, 1972



On construit un modèle viscoplastique associé *en utilisant un potentiel viscoplastique qui définit la direction et l'intensité de l'écoulement*

$$\Omega : \underset{\sim}{\sigma} \longrightarrow \Omega(f(\underset{\sim}{\sigma}))$$

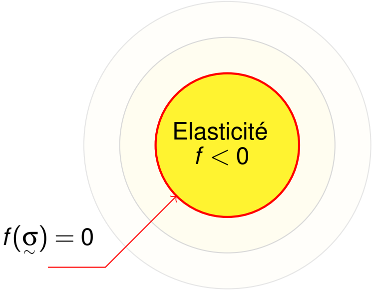
$$\Omega(0) = 0$$

Ω *fonction croissante de f*

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{v}\, \underset{\sim}{n}$$

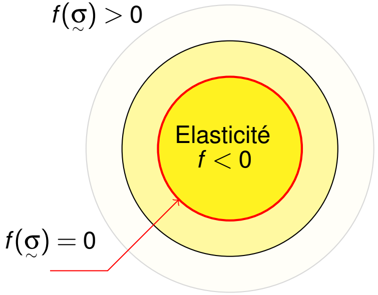
Ω fonction convexe de $\underset{\sim}{\sigma}$: $\Omega(k\underset{\sim}{\sigma}_1 + (1-k)\underset{\sim}{\sigma}_2) \leqslant k\Omega(\underset{\sim}{\sigma}_1) + (1-k)\Omega(\underset{\sim}{\sigma}_2)$

Remarque : modèle non associé



$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \dot{v}\,\underset{\sim}{N}$$

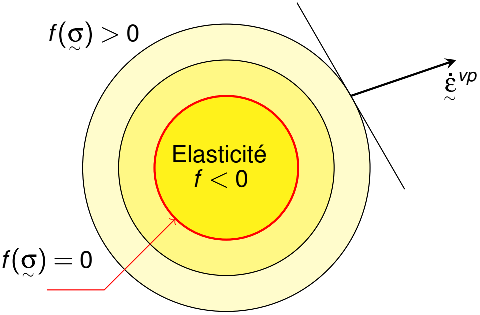
Remarque : modèle non associé



On construit construit indépendamment la direction de l'écoulement et son intensité

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \dot{v}\,\underset{\sim}{N}$$

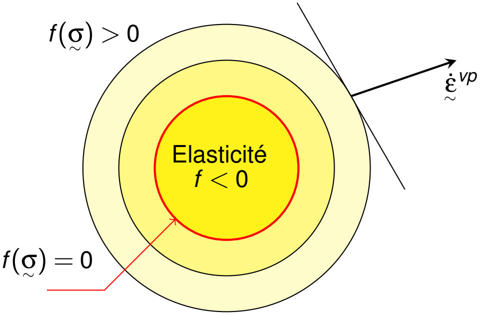
Remarque : modèle non associé



On construit construit indépendamment la direction de l'écoulement et son intensité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \dot{v}\,\underset{\sim}{N}$$

Remarque : modèle non associé



On construit construit indépendamment la direction de l'écoulement et son intensité

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \dot{v}\,\underset{\sim}{N}$$

NOTE : dérivée partielle de $\underset{\sim}{s}$ et de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$

- On aura à exprimer $\dfrac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$ pour calculer $\underset{\sim}{n}$
- La dérivée de $\underset{\sim}{s}$ par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ est le tenseur $\underset{\approx}{J} = \underset{\approx}{I} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{I} \otimes \underset{\sim}{I}$, qui s'écrit en notation indicielle :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

  en effet :

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\approx}{J} : \underset{\sim}{\sigma}$$

- Dérivée de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \left((3/2)\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}\right)^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{s}} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}$$

- Autre solution :

$$J^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \qquad \text{donc} \qquad 2\,J\,dJ = 3s_{ij}\,ds_{ij} = 3s_{ij}\,d\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J} \qquad \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

NOTE : dérivée partielle de $\underset{\sim}{s}$ et de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$

- On aura à exprimer $\dfrac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$ pour calculer $\underset{\sim}{n}$
- La dérivée de $\underset{\sim}{s}$ par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ est le tenseur $\underset{\approx}{J} = \underset{\approx}{I} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{I} \otimes \underset{\sim}{I}$, qui s'écrit en notation indicielle :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

en effet :

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\approx}{J} : \underset{\sim}{\sigma}$$

- Dérivée de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \left((3/2)\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}\right)^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{s}} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}$$

- Autre solution :

$$J^2 = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij} \qquad \text{donc} \qquad 2\,J\,dJ = 3s_{ij}\,ds_{ij} = 3s_{ij}\,d\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J} \qquad \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

NOTE : dérivée partielle de $\underset{\sim}{s}$ et de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$

- On aura à exprimer $\dfrac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$ pour calculer $\underset{\sim}{n}$
- La dérivée de $\underset{\sim}{s}$ par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ est le tenseur $\underset{\approx}{J} = \underset{\approx}{I} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{I} \otimes \underset{\sim}{I}$, qui s'écrit en notation indicielle :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

en effet :

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\approx}{J} : \underset{\sim}{\sigma}$$

- Dérivée de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \left((3/2)\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}\right)^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{s}} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}$$

- Autre solution :

$$J^2 = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij} \qquad \text{donc} \qquad 2\,J\,dJ = 3s_{ij}\,ds_{ij} = 3s_{ij}\,d\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J} \qquad \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

NOTE : dérivée partielle de $\underset{\sim}{s}$ et de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$

- On aura à exprimer $\dfrac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$ pour calculer $\underset{\sim}{n}$
- La dérivée de $\underset{\sim}{s}$ par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ est le tenseur $\underset{\approx}{J} = \underset{\approx}{I} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{I} \otimes \underset{\sim}{I}$, qui s'écrit en notation indicielle :

$$J_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

  en effet :

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\approx}{J} : \underset{\sim}{\sigma}$$

- Dérivée de J par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{s}} : \frac{\partial \underset{\sim}{s}}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\partial \left((3/2)\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}\right)^{1/2}}{\partial \underset{\sim}{s}} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} : \underset{\approx}{J} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}$$

- Autre solution :

$$J^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \qquad \text{donc} \qquad 2\,J\,dJ = 3 s_{ij}\,ds_{ij} = 3 s_{ij}\,d\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J} \qquad \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

Mon premier modèle de viscoplasticité 3D

Modèle sans écrouissage et sans seuil

- On suppose que le domaine d'élasticité est réduit à un point, on utilise le critère de von Mises :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Le potentiel est une fonction puissance de f (*loi de Norton*) :

$$\Omega(\underset{\sim}{\sigma}) = \frac{K}{n+1}\left(\frac{J(\underset{\sim}{\sigma})}{K}\right)^{n+1}$$

- Ecoulement viscoplastique obtenu par dérivation partielle :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^{n}\frac{\partial J}{\partial\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^{n}\frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

Mon premier modèle de viscoplasticité 3D

Modèle sans écrouissage et sans seuil

- On suppose que le domaine d'élasticité est réduit à un point, on utilise le critère de von Mises :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Le potentiel est une fonction puissance de f (*loi de Norton*) :

$$\Omega(\underset{\sim}{\sigma}) = \frac{K}{n+1}\left(\frac{J(\underset{\sim}{\sigma})}{K}\right)^{n+1}$$

- Ecoulement viscoplastique obtenu par dérivation partielle :

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^n \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^n \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

Mon premier modèle de viscoplasticité 3D

Modèle sans écrouissage et sans seuil

- On suppose que le domaine d'élasticité est réduit à un point, on utilise le critère de von Mises :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Le potentiel est une fonction puissance de f (*loi de Norton*) :

$$\Omega(\underset{\sim}{\sigma}) = \frac{K}{n+1}\left(\frac{J(\underset{\sim}{\sigma})}{K}\right)^{n+1}$$

- Ecoulement viscoplastique obtenu par dérivation partielle :

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial\Omega}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^n\frac{\partial J}{\partial\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\frac{J}{K}\right)^n\frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}$$

Modèle de Norton en 1D

- Une seule composante du tenseur de contrainte est non nulle

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la normale, avec $J = |\sigma|$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{s}}{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} signe(\sigma)$$

- Composantes de la vitesse de déformation viscoplastique

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n signe(\sigma) \qquad \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^{vp}}{2}$$

Modèle de Norton en 1D

- Une seule composante du tenseur de contrainte est non nulle

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la normale, avec $J = |\sigma|$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{s}}{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} signe(\sigma)$$

- Composantes de la vitesse de déformation viscoplastique

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n signe(\sigma) \qquad \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^{vp}}{2}$$

Modèle de Norton en 1D

- Une seule composante du tenseur de contrainte est non nulle

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la normale, avec $J = |\sigma|$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{s}}{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} signe(\sigma)$$

- Composantes de la vitesse de déformation viscoplastique

$$\dot{\varepsilon}^{vp}_{11} = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right)^n signe(\sigma) \qquad \dot{\varepsilon}^{vp}_{22} = \dot{\varepsilon}^{vp}_{33} = -\frac{\dot{\varepsilon}^{vp}_{11}}{2}$$

Autres modèles particuliers

- *Bingham* : modèle sans écrouissage, avec seuil, linéaire en contrainte :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J - \sigma_y \qquad \Omega = \frac{\eta}{2}\left\langle \frac{f}{\eta} \right\rangle^2$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \left\langle \frac{f}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{J-\sigma_y}{\eta} \right\rangle \qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J} \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}\left\langle \frac{J-\sigma_y}{\eta} \right\rangle$$

- *Newton* : modèle sans écrouissage, sans seuil ($\sigma_y = 0$), linéaire en contrainte :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \frac{J}{\eta} \qquad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}\frac{J}{\eta} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2\eta}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\eta}$$

Autres modèles particuliers

- *Bingham* : modèle sans écrouissage, avec seuil, linéaire en contrainte :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = J - \sigma_y \qquad \Omega = \frac{\eta}{2}\left\langle \frac{f}{\eta} \right\rangle^2$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \left\langle \frac{f}{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{J - \sigma_y}{\eta} \right\rangle \qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J} \qquad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}\left\langle \frac{J - \sigma_y}{\eta} \right\rangle$$

- *Newton* : modèle sans écrouissage, sans seuil ($\sigma_y = 0$), linéaire en contrainte :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial f} = \frac{J}{\eta} \qquad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2J}\frac{J}{\eta} = \frac{3\underset{\sim}{s}}{2\eta}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\eta}$$

Plan

1 Les ingrédients

2 Ecoulement viscoplastique

3 Ecoulement plastique
- Plasticité associée
- Evaluation des directions d'écoulement
- Modèle parfaitement plastique

4 Synthèse

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles* $\underset{\sim}{\sigma}$ *associées aux vitesses de déformations plastiques réelles* $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ *est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible* $\underset{\sim}{\sigma}^*$ *(*id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à* $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- On a effectivement un *max* si la fonction *f* est *convexe*

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles $\underset{\sim}{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underset{\sim}{\sigma}^*$ (*id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$*»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- La solution du problème d'écoulement plastique maximise la puissance plastique $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$
- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles $\underset{\sim}{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underset{\sim}{\sigma}^*$ (*id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$*»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- La solution du problème d'écoulement plastique maximise la puissance plastique $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ Il s'agit d'une maximisation *sous contrainte*, car on doit avoir $f(\underset{\sim}{\sigma}) \leqslant 0$
- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles $\underset{\sim}{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underset{\sim}{\sigma}^*$* (id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$*»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- On a effectivement un *max* si la fonction *f* est *convexe*

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles* $\underset{\sim}{\sigma}$ *associées aux vitesses de déformations plastiques réelles* $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ *est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible* $\underset{\sim}{\sigma}^*$ (id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à* $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- On a effectivement un *max* si la fonction *f* est *convexe*

Principe du travail maximal

- Formulation due à *Hill (1951)* :
  «*Le travail des contraintes réelles $\underset{\sim}{\sigma}$ associées aux vitesses de déformations plastiques réelles $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underset{\sim}{\sigma}^*$* (id est *ne violant pas la loi de plasticité) associé à $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p$*»

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- On forme $\mathbb{F}$ qui combine la fonction à maximiser et la contrainte à l'aide d'un *multiplicateur plastique* (problème d'optimisation non linéaire)

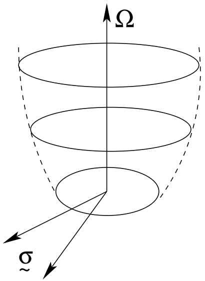
$$\mathbb{F}(\underset{\sim}{\sigma}) = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\lambda} f(\underset{\sim}{\sigma})$$

- Dérivation par rapport à $\underset{\sim}{\sigma}$ pour trouver un extremum

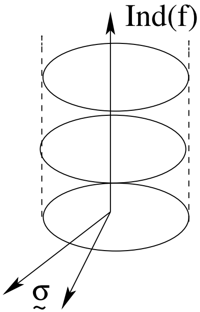
$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

- On a effectivement un *max* si la fonction f est *convexe*

De la viscoplasticité à la plasticité



Potentiel viscoplastique



Obtention d'un modèle plastique
par passage à la limite

Viscoplasticité	$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \dot{v}\,\underset{\sim}{n}$	$\dot{v}$ vient de $\Omega(f)$
Plasticité	$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n}$	$\dot{\lambda}$ vient de la *condition de cohérence*

Aspects géométriques associés au principe de Hill

$$(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

- $\underset{\sim}{\sigma}^*$ sur la surface de charge, $\underset{\sim}{\sigma}$ est dans le domaine, $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \underset{\sim}{0}$
- *Règle de normalité*, en auscultant le plan tangent, ($\underset{\sim}{\sigma}$ sur la surface),

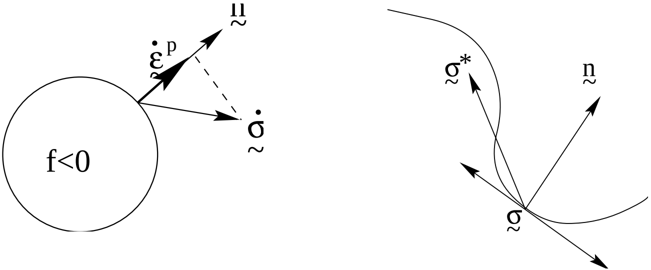
$$k\, \underset{\sim}{t}^* : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0 \quad \text{et} \; -k\, \underset{\sim}{t}^* : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p \geqslant 0$$

$$\text{si bien que} \quad \underset{\sim}{t}^* : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = 0$$

- *Signe du multiplicateur*, en auscultant la normale intérieure, ($\underset{\sim}{\sigma}$ sur la surface), $(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^*) = k\, \underset{\sim}{n}$ colinéaire à $\underset{\sim}{n}$ (k>0), et :

$$k\, \underset{\sim}{n} : \dot{\lambda} \underset{\sim}{n} \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad \dot{\lambda} \geqslant 0$$

Convexité de la surface de charge



a. Illustration de la règle de normalité b. Convexité de *f*

Principe de Hill $\equiv$ (*f convexe et écoulement normal*)

Plan

1. Les ingrédients
2. Ecoulement viscoplastique
3. Ecoulement plastique
   - Plasticité associée
   - Evaluation des directions d'écoulement
   - Modèle parfaitement plastique
4. Synthèse

Direction d'écoulement associée au critère de von Mises

- Modèle parfaitement plastique $f(\underset{\sim}{\sigma}) = J(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y$

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda} n_{ij} \qquad \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n}$$

$$n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J} \qquad \underset{\sim}{n} = \frac{\partial J}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}$$

- On appelle *déformation plastique cumulée*, p, la longueur du trajet représentant l'écoulement dans l'espace des déformations plastiques, soit, au temps t,

$$p(t) = \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau \qquad \dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p\right)^{1/2}$$

- Avec le critère de von Mises

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} : \dot{\lambda}\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J}\right)^{1/2} = \dot{\lambda}$$

Ecoulement pour le modèle de von Mises sous chargement uniaxial

- Une seule composante du tenseur de contrainte est non nulle

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{s} = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de la normale, avec $J = |\sigma|$

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{s}}{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} signe(\sigma)$$

- Composantes de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{\varepsilon}^p_{11} = \dot{\lambda} = \dot{p} \qquad \dot{\varepsilon}^p_{22} = \dot{\varepsilon}^p_{33} = -\frac{\dot{p}}{2}$$

Direction d'écoulement associée au critère de Tresca

- Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, : $f(\underset{\sim}{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y$, il s'établit un écoulement plastique *de cisaillement pur*, avec $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p_{22} = 0$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- En traction simple, par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$:

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y, \text{ ou } f(\underset{\sim}{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dot{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Direction d'écoulement associée au critère de Drucker - Prager

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = (1-\alpha)\, J(\underset{\sim}{\sigma}) + \alpha\, trace(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y$$

- Augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué :

$$\underset{\sim}{n} = \frac{3}{2}(1-\alpha)\frac{\underset{\sim}{s}}{J} + \alpha\, \underset{\sim}{I}$$

$$trace(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) = \dot{\lambda}\, trace\, \underset{\sim}{n} = 3\,\alpha\,\dot{\lambda}$$

Plan

1 Les ingrédients

2 Ecoulement viscoplastique

3 Ecoulement plastique
- Plasticité associée
- Evaluation des directions d'écoulement
- Modèle parfaitement plastique

4 Synthèse

Comportement parfaitement plastique

- Ecoulement à déterminer à partir de $f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$ et $\dot{f}(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n}$$

- Ecriture de la condition de cohérence (sur $f(\underset{\sim}{\sigma}) = J - \sigma_y$)

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = 0$$

Comportement parfaitement plastique

- Ecoulement à déterminer à partir de $f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$ et $\dot{f}(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \dot{\lambda} \underset{\sim}{n}$$

- Ecriture de la condition de cohérence (sur $f(\underset{\sim}{\sigma}) = J - \sigma_y$)

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} = \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} = 0$$

Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que "tourner" autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique ne peut pas se déterminer en termes de vitesse de contrainte

Comportement parfaitement plastique, déformation imposée

- Elasticité

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\approx}{\Lambda} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = 0$$

- Projection sur la normale à la surface

$$\underset{\sim}{n} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) = \underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \dot{\lambda}\,\underset{\sim}{n}$$

- Expression du multiplicateur plastique en fonction de la vitesse de déformation totale

$$\dot{\lambda} = \frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}}$$

- Expression de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}}\,\underset{\sim}{n}$$

Comportement parfaitement plastique, tenseur élastoplastique, $\underset{\approx}{L}^{ep}$

- Vitesse de contrainte $\underset{\sim}{\dot{\sigma}} = \underset{\approx}{\Lambda} : (\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} - \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p)$
- En remplaçant la vitesse de déformation plastique

$$\underset{\sim}{\dot{\sigma}} = \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} - \underset{\approx}{\Lambda} : \left(\frac{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}}{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}} \underset{\sim}{n} \right)$$

- Comme $\Lambda_{ijkl} n_{pq} \Lambda_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs} n_{kl} = \Lambda_{ijkl} n_{kl} n_{pq} \Lambda_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs}$, on en déduit $\underset{\sim}{\dot{\sigma}} = \underset{\approx}{L}^{ep} \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}$, avec

$$\underset{\approx}{L}^{ep} = \underset{\approx}{\Lambda} - \frac{(\underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}) \otimes (\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda})}{\underset{\sim}{n} : \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\sim}{n}}$$

Formellement, c'est une relation de type élasticité, mais exprimée «en vitesse»

Comportement parfaitement plastique, cas de l'élasticité isotrope et du critère de von Mises

- Simplifications possibles

$$\Lambda_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad ; \quad n_{ij} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{J}$$

$$n_{ij}\,\Lambda_{ijkl} = 2\,\mu\,n_{kl} \quad ; \quad n_{ij}\,\Lambda_{ijkl}\,n_{kl} = 3\mu \quad ; \quad n_{ij}\,\Lambda_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} = 2\,\mu\,n_{kl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}$$

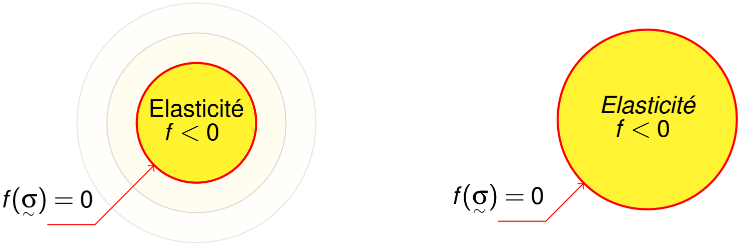
$$\dot{\lambda} = \frac{2}{3}\,\underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}$$

- Cas du chargement uniaxial : dans ce cas, la vitesse de déformation totale est égale à la vitesse de déformation plastique, la normale est la diagonale $(1, -1/2, -1/2)\,\text{signe}(\underset{\sim}{\sigma})$. La vitesse de déformation totale est la diagonale $\left(\dot{\varepsilon}^p_{11}, -\dot{\varepsilon}^p_{11}/2, -\dot{\varepsilon}^p_{11}/2\right)$, on retrouve bien :

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}^p_{11}\; signe(\sigma)$$

Comparaison des lois plastiques et viscoplastiques

Représentations dans l'espace des contraintes

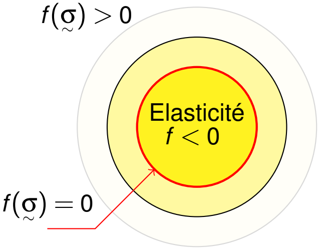


Viscoplasticité

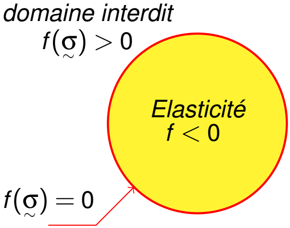
Plasticité

Comparaison des lois plastiques et viscoplastiques

Représentations dans l'espace des contraintes



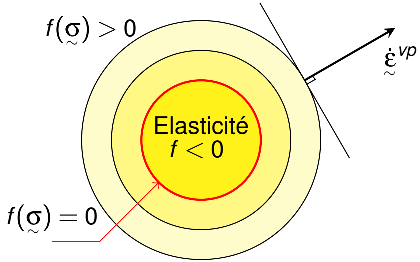
Viscoplasticité



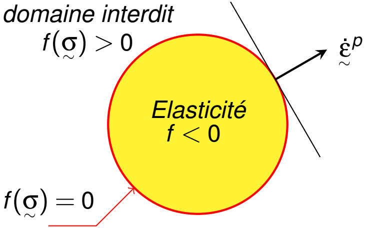
Plasticité

Comparaison des lois plastiques et viscoplastiques

Représentations dans l'espace des contraintes



Viscoplasticité



Plasticité