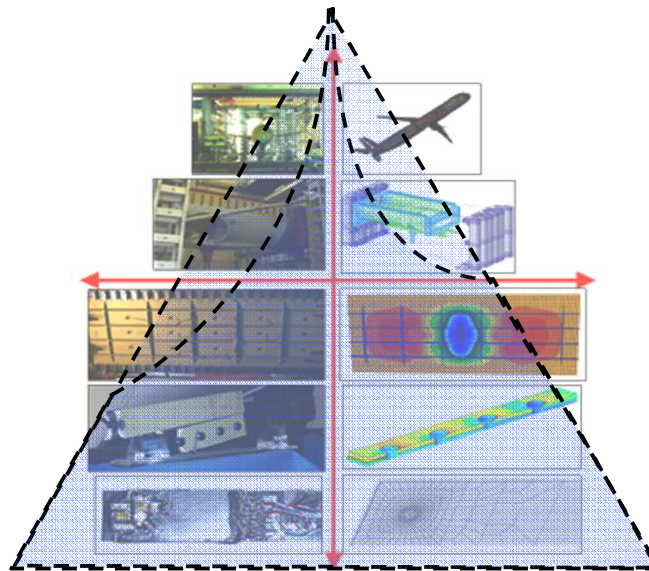


# Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

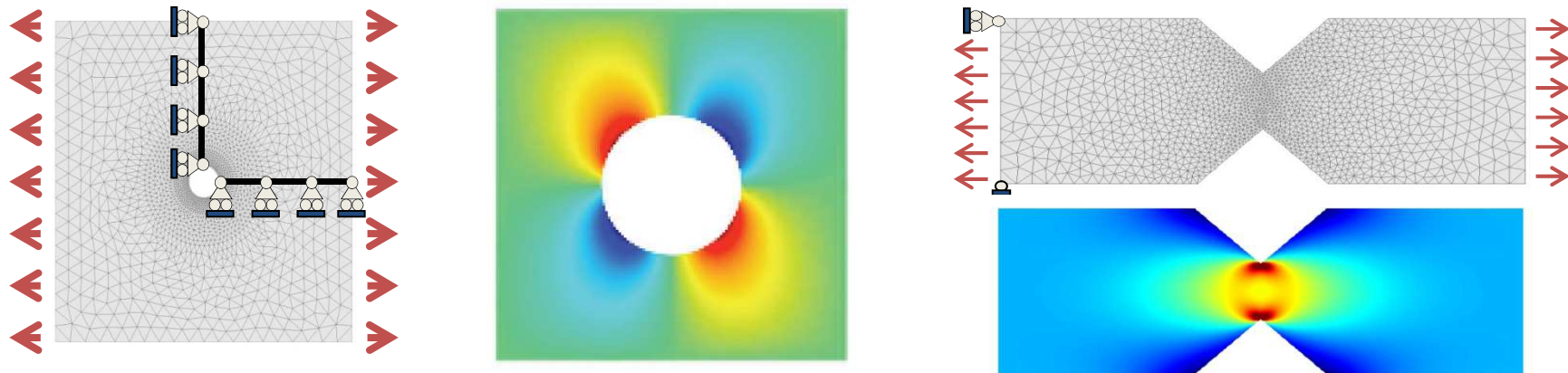
**Christian Rey**

[christian.rey@safran.fr](mailto:christian.rey@safran.fr)



# Plan du cours


- 1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin
- 2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique
- 3- La méthode des éléments finis
- 4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux
- 6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux**



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

# Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

## Plan du cours

1. Introduction
  1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
  2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
  3. Comportement élastoplastique (rappels)
  
2. Calcul de solides élastoplastiques
  1. **Aspects locaux (algorithme de retour radial)** 
  2. Aspects globaux (Opérateur tangent cohérent)
  
3. Elasticité en transformations finies : exemple du flambage
  1. Equations de l'élasticité en transformation finies
  2. Déformations infinitésimales – grands déplacements

## Chapitre 3




### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant


## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution 
  1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
  2. Principe de la résolution numérique (rappel)
  3. Résolution du problème global : approche itérative
  4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

## Chapitre 3

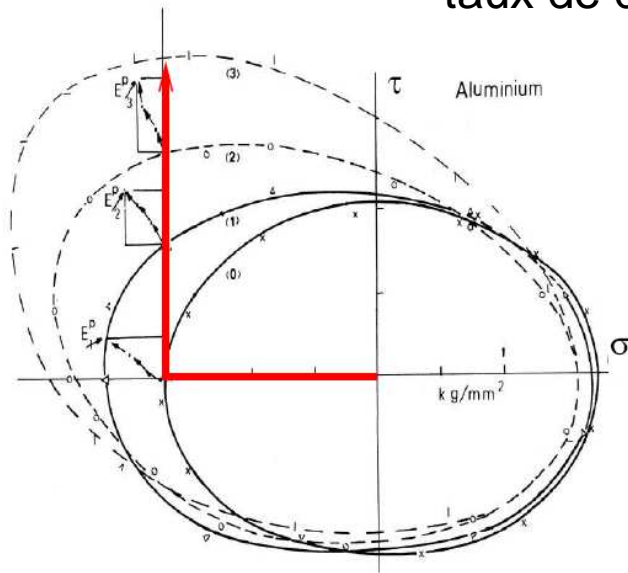
### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
    1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
    2. Principe de la résolution numérique (rappel)
    3. Résolution du problème global : approche itérative
    4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
  2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
  3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
- 

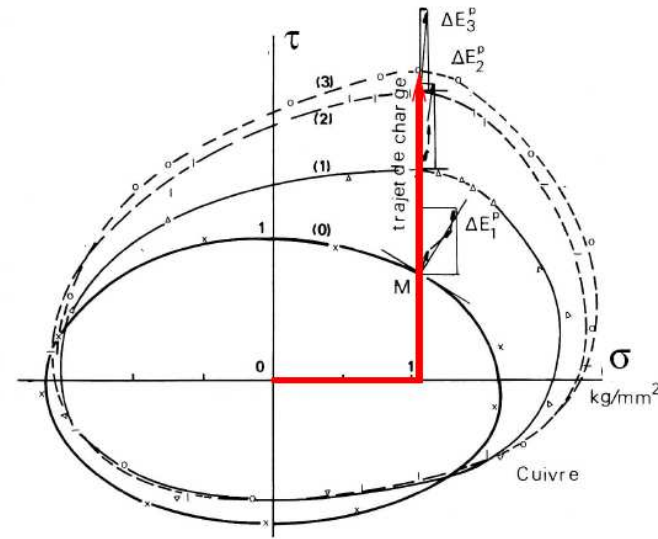
# Rappel : Surface de charge et règle de Normalité

- Observation expérimentale :

taux de déformation plastique est **normal** à la surface de charge



[Bui, 1970]



- Formulation de la règle de normalité

$$\begin{cases} \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \text{ is directed as the outgoing normal to } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$  : multiplicateur plastique (a priori inconnu)

## Rappel : Critère de Von Mises (1913)

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}}_{\text{Terme de pression}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Limite d'élasticité} \\ \text{Contrainte équivalente} \\ \text{Déviateur des contraintes} \end{array}$$

- **Limite indépendante de la pression**
- **Utilisé pour décrire la plasticité des métaux**  
(déformation plastique due au cisaillement, dislocations du réseau cristallin)
- Pour une traction uniaxiale  $\underline{\sigma} = \sigma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$  on a  $\sigma^{\text{eq}} = \sigma$  (justification du coef  $\sqrt{3/2}$ )
- R : limite élastique observé sous un chargement de traction uniaxial



# Rappel : règle de normalité pour le critère de Von Mises

- Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- Règle de normalité

Purement déviatorique

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- Lien entre  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{p}$ :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{\text{eq}} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = \dot{\gamma}$$

Loi de comportement s'écrit finalement :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

# Rappel : Synthèse

## ➤ Hypothèses

- HPP, linéaire, isotrope, élastique
- Critère de Von Mises
- Règle de normalité, écrouissage isotrope

Loi de comportement linéaire élastique isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

## ➤ Loi de comportement

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\|$$

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}})$$

Elasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0$$

Règle de normalité

**Hypothèse sur  $R(p)$  (convexité de  $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$ )**

(i)  $R(0) = R_0$       (ii)  $R'(p) \geq 0$

(iii)  $R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

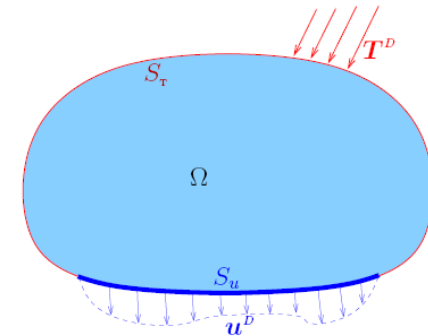
# Rappel : Hypothèses et équations du problème

## Critère Von Mises

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} R & \text{Limite d'élasticité} \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| & \text{Contrainte équivalente} \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} & \text{Déviateur des contraintes} \end{array} \right.$$



$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (\text{compatibility})$$

$$\text{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (\text{equilibrium})$$

$$\underline{\sigma} = \kappa \text{tr}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) \underline{1} + 2\mu(\underline{e} - \underline{e}^p) \quad (\text{constitutive law, elastic part})$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{s}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0, \quad \dot{p}[\sigma^{\text{eq}} - R(p)] = 0$$

(constitutive law, plastic part)

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}^D(\underline{x}, t) \quad \text{on } S_u \times [0, T] \quad (\text{imposed displacements})$$

$$\underline{T}(\underline{x}, t) = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \quad \text{on } S_T \times [0, T] \quad (\text{external loading})$$


$$\underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, 0) = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \quad (\text{initial condition})$$

Où,  $\underline{e}$ ,  $\underline{e}^p$  et  $\underline{s}$  sont les parties déviatoriques de  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{\varepsilon}^p$  et  $\underline{\sigma}$

Et  $p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\dot{\varepsilon}}^p(\tau)\| d\tau$  la déformation plastique cumulée

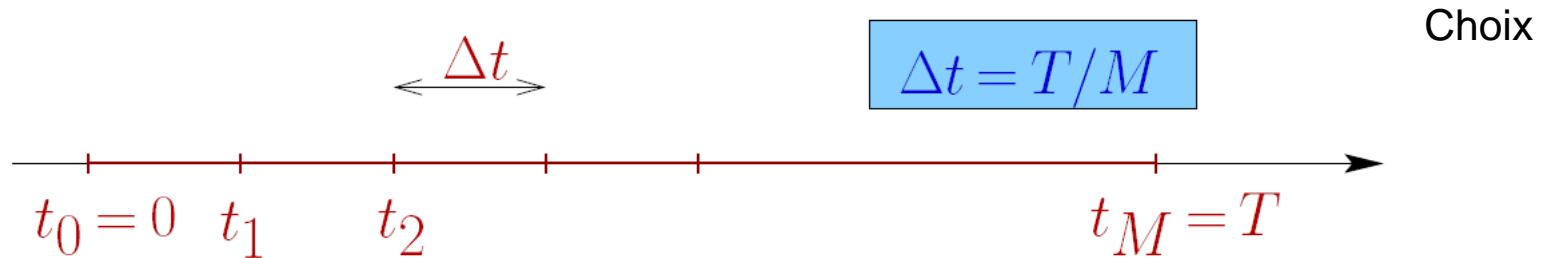
## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
    1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
    2. Principe de la résolution numérique (rappel)
    3. Résolution du problème global : approche itérative
    4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
  2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
  3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
- 

# Rappel : Discrétisation temporelle

## Recherche de solutions pas à pas



### ➤ Objectif de l'algorithme :

(notation :  $f_n(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}, t_n)$ )

Calculer l'état mécanique  $\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^p, \underline{\sigma}_n \dots\}$  chaque instant  $t = t_n$



### ➤ Approche incrémentale : calculer les états mécanique $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M$ pas à pas

Formulation d'un algorithme qui :

Connaissant l'état mécanique  $\mathcal{S}_n$  et le chargement  $(\underline{f}_{n+1}, \underline{u}_{n+1}^D, \underline{T}_{n+1}^D)$

donne l'état mécanique  $\mathcal{S}_{n+1}$

## Rappel : Problème à l'instant $t_{n+1}$

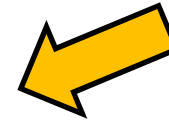
Pour chaque incrément  $S_n \rightarrow S_{n+1}$ :

- Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant  $t = t_{n+1}$
- Discrétisation en espace (FEM) ; approximation de  $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

- Loi de comportement (  $\mathcal{F}$  : opérateur associé à **l'algorithme de retour radial** ) :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\varepsilon}_n; S_n)$$



## Rappel : Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$  (elastic predictor), then  $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$  and  $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas,eq}}$  ;

## Rappel : Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$  (elastic predictor), then  $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$  and  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$  ;

(b) Compute  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n)$  and **test** :

▶ **If**  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$  (**elastic evolution**), solution given by :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n \quad \text{(END)}$$

▶ **If**  $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0$  (**elastoplastic evolution**) :

(i) Solve  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$  for  $\Delta p_n$  ;

(ii) Compute the increment of plastic strains

$$\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \frac{3\Delta p_n}{2\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} ;$$

(iii) Update variables :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} &= \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} + \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, & p_{n+1} &= p_n + \Delta p_n \\ \underline{\sigma}_{n+1} &= \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta\underline{\varepsilon}_n) \underline{1} + 2\mu(\Delta\underline{e}_n - \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}) \end{aligned} \quad \text{(END)}$$



## Rappel : Problème à l'instant $t_{n+1}$

Pour chaque incrément  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$ :

➤ Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant  $t = t_{n+1}$

➤ Discrétisation en espace (FEM) ; approximation de  $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

➤ Loi de comportement (  $\mathcal{F}$  : opérateur associé à **l'algorithme de retour radial** ) :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n ; \mathcal{S}_n)$$

➤ Equilibre + Loi de comportement à l'instant  $t = t_{n+1}$

➤ **Le problème au pas de temps  $t=t_{n+1}$ , s'écrit :**

Inconnue  $\Delta \underline{u}_n = \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$ , solution (via un algorithme itératif) de

Trouver  $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$  tel que  $R(\Delta \underline{u}_n ; \underline{v}, \mathcal{S}_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(0)$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n ; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n] ; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

## Problème à l'instant $t_{n+1}$ : Formulation global

Trouver  $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$  tel que  $R(\Delta \underline{u}_n; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

avec

problème non linéaire

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

### ➤ Mise en oeuvre de la méthode de Newton Raphson

➤ Procédure itérative : construction d'une séquence

$$\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}, \quad \text{i.e.} \quad \delta \underline{u}_n^{(k)} = \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} - \Delta \underline{u}_n^{(k)}$$

➤ Par linéarisation autour de  $\Delta \underline{u}_n^{(k)}$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0$$

➤ Application linéaire tangente global  $\mathcal{R}'$  définie par :

$$\mathcal{R}(\underline{v} + \underline{z}; \underline{w}, S_n) - \mathcal{R}(\underline{v}; \underline{w}, S_n) = \langle \mathcal{R}'(\underline{v}; \underline{w}, S_n), \underline{z} \rangle + o(\|\underline{z}\|)$$

### ➤ Application linéaire tangente : deux possibilités

➤ Méthode de Newton avec opérateur tangent


*== > calcul de l'application linéaire tangente  $\mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n)$*

➤ Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

*== > approximation de  $\mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n)$  par une application linéaire constante*


## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
  - 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent** 
  3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
1. Opérateur tangent local
  2. Opérateur tangent global
  3. Algorithmes de résolution

## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
  1. Opérateur tangent local 
  2. Opérateur tangent global
  3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

# Opérateur tangent Cohérent

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n)$$

$$\mathcal{R}(\Delta_{\underline{\underline{u}}}_n; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta_{\underline{\underline{u}}}_n]; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{w}} dV - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}_{n+1}^D \cdot \underline{\underline{w}} dS$$

- L'application linéaire tangent global  $\mathcal{R}'$  est définie par :

$$\mathcal{R}(\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{z}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) - \mathcal{R}(\underline{\underline{v}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) = \langle \mathcal{R}'(\underline{\underline{v}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n), \underline{\underline{z}} \rangle + o(\|\underline{\underline{z}}\|)$$

- Linéarisation de l'application  $\mathcal{F}$  :

$$\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta_{\underline{\underline{u}}}]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) - \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) &= \langle \mathcal{F}'(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n), \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \\ &= \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) : \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) : \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \end{aligned}$$

- Le tenseur du 4ième ordre  $\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(k)}; \mathcal{S}_n)$  s'appelle l'opérateur tangent local

# Opérateur tangent local

$$\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{(k)}; \mathcal{S}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{(k)}; \mathcal{S}_n) = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{(k)}; \mathcal{S}_n)$$

avec (Amphi 2)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}; \mathcal{S}_n) = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}} + \mathcal{A} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}+1}^{\text{elas}}} - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{\text{P}}$$

- Cas 1 : pas d'évolution plastique :  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{\text{P}} = \underline{\underline{0}}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}+1} = \underline{\underline{\sigma}}_{\underline{\underline{n}}+1}^{\text{elas}}, \quad \Delta p_n = 0, \quad \text{et par conséquent}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}; \mathcal{S}_n) = \mathcal{A}$$

- Cas 2 : avec évolution plastique :  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{\text{P}} \neq \underline{\underline{0}}$

Tenseur d'élasticité

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}; \mathcal{S}_n) = \mathcal{A} - 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}^{\text{P}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{n}}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

## Expression de la “correction plastique” $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n^p}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} \left( \frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

- Calcul des dérivées de (i)  $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$ , (ii)  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$ , (iii)  $\Delta p_n$

$$(i) \quad \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s}_n + 2\mu \Delta \underline{e}_n \quad ==> \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec  $\mathcal{K}$  : projection dans l'espace déviatorique, exemple:  $\Delta \underline{e} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\varepsilon}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad ==> \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \frac{\partial \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \mathcal{K} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

## Expression de la “correction plastique” $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left( \frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

- Calcul des dérivées de (i)  $\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$ , (ii)  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$ , (iii)  $\Delta p_n$

$$(i) \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec  $\mathcal{K}$  : projection dans l'espace déviatorique, exemple:  $\Delta \underline{\underline{e}} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \{ \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} - 3\mu \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} - \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} R(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

avec  $R'_{n+1} = R'(p_{n+1}) = R'(p_n + \Delta p_n)$



## Expression de la “correction plastique” $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left( \frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

➤ Calcul des dérivées de (i)  $\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$ , (ii)  $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$ , (iii)  $\Delta p_n$

$$(i) \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec  $\mathcal{K}$  : projection dans l'espace déviatorique, exemple:  $\Delta \underline{\underline{e}} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \{ \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

avec  $R'_{n+1} = R'(p_{n+1}) = R'(p_n + \Delta p_n)$

## Expression de la “correction plastique” $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}, \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Que l'on utilise pour le calcul de la correction plastique

$$\mathcal{D} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left( \frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right) \quad \mathcal{D}_{ijkl} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{kl,n}} \left( \frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} s_{ij,n+1}^{\text{elas}} \right)$$

i.e.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \varepsilon_{kl,n}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} s_{kl,n+1}^{\text{elas}} \quad s_{ij,n+1}^{\text{elas}} s_{kl,n+1}^{\text{elas}} \leftrightarrow \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \otimes \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) = 3\mu(\gamma - \beta) \left( \frac{\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \right) + 2\mu\beta \mathcal{K}$$

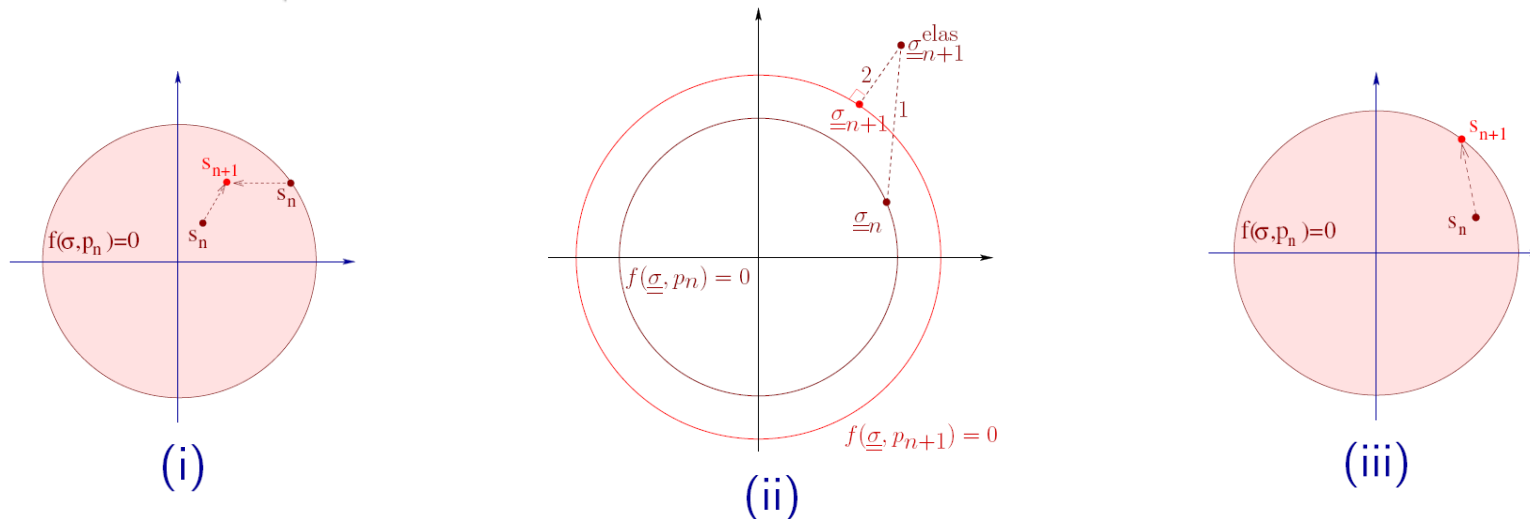
$$\beta = \frac{3\mu \Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} = 1 - \frac{R_{n+1}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \quad \gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}}$$

➤ La correction plastique  $\mathcal{D}$  : tenseur du 4ième ordre (même symétrie que  $\mathcal{A}$ )

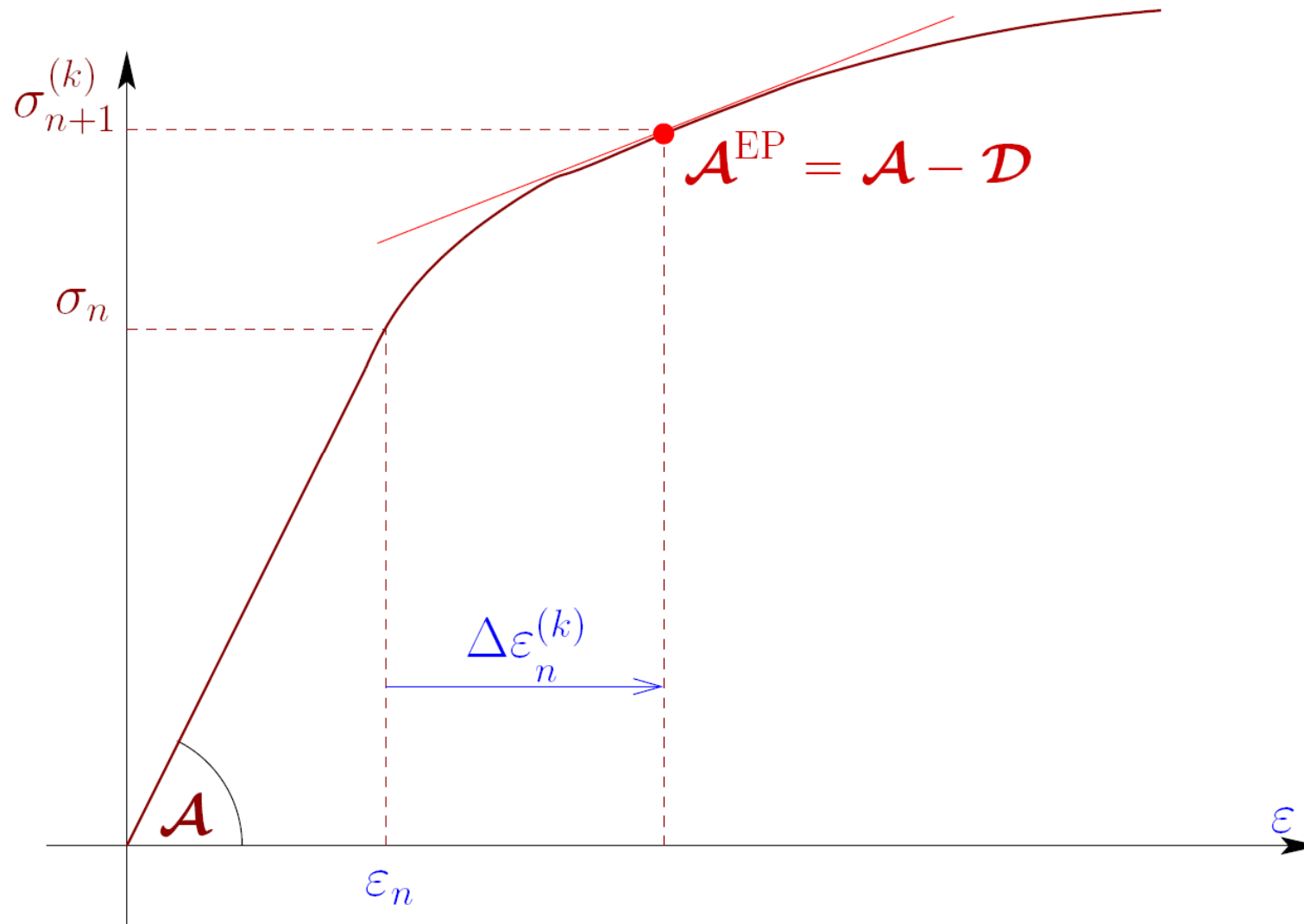
# Opérateur tangent local $\mathcal{A}^{\text{EP}}$ : synthèse

$$\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n) = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{si } f_{n+1}^{\text{elas}} < 0 \text{ (évolution élastique)} \\ \mathcal{A} - \mathcal{D}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}^{(k)}; \mathcal{S}_n) & \text{si } f_{n+1}^{\text{elas}} > 0 \text{ (évolution élastoplastique)} \end{cases}$$

- $\mathcal{F}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n)$  différentiable par rapport à  $\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}$  si
  - (i)  $f_{n+1}^{\text{elas}} < 0$  (dans le domaine d'élasticité)
  - (ii)  $f_{n+1}^{\text{elas}} > 0$  (évolution plastique  $\Delta p_n \neq 0$ )
- $\mathcal{F}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n)$  non différentiable par rapport à  $\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}$  si
  - (iii)  $f_{n+1}^{\text{elas}} = 0$  avec  $\Delta p_n = 0$  (situation limite)



# Opérateur tangent local $\mathcal{A}^{\text{EP}}$ : interpretation



## Algo 4 : Algorithme de retour radial *avec matrice tangente*

(a) Evaluate  $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu\mathcal{K}:\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$  (elastic predictor) and  $\sigma^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}\|$  ;

## Algo 4 : Algorithme de retour radial *avec matrice tangente*

(a) Evaluate  $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu\mathcal{K}:\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$  (elastic predictor) and  $\sigma^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}\|$  ;

(b) Compute  $f^{\text{elas}} = f(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) = \sigma^{\text{elas,eq}} - R(p_n)$ . Two alternatives :

► Si  $f^{\text{elas}} \leq 0$ , **elastic evolution** :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} &= 3\kappa\text{Tr}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}^{\text{elas}}, \\ \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} &= \underline{\underline{0}}, \quad \mathcal{A}^{\text{EP}} = \mathcal{A} \end{aligned} ;$$

► If  $f^{\text{elas}} > 0$ , **elastoplastic evolution** :

(i) Solve for  $\Delta p$  :

$$\sigma^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p - R(p_n + \Delta p) = 0 ;$$

(ii) Evaluate the constants  $\beta, \gamma$  :  $\beta = \frac{3\mu\Delta p}{\sigma^{\text{elas,eq}}}$   $\gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R'(p_n + \Delta p)}$  ;

(iii) Update  $\underline{\underline{\sigma}}$  and  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} &= (1 - \beta)\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} + \kappa\text{Tr}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} ; \\ \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}} &= (\beta/2\mu)\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} \end{aligned} ;$$

(iv) Create the elastoplastic stiffness tensor  $\mathcal{A}^{\text{EP}}$  :

$$\mathcal{A}^{\text{EP}} = \mathcal{A} - 3\mu(\gamma - \beta) \left( \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \right) - 2\mu\beta\mathcal{K}.$$

# Calcul pratique de l'opérateur linéaire tangent

$$\mathcal{A}^{\text{EP}} = \mathcal{A} - 3\mu(\gamma - \beta) \left( \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \right) - 2\mu\beta\mathcal{K}$$

- ▶ Notation de Voigt (utile pour la programmation)

$$[A^{\text{EP}}] = [A] - [D] \quad \text{avec} \quad [D] = \frac{3\mu(\gamma - \beta)}{(\sigma^{\text{elas,eq}})^2} \{s^{\text{elas}}\} \{s^{\text{elas}}\}^T + 2\mu\beta[\mathcal{K}]$$

avec


$$\mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} = [\mathcal{K}] \{\varepsilon\} \quad \text{où} \quad [\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\{s\} = \{\sigma\} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

$$\sigma^{\text{eq}} = \left[ \frac{3}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + 3s_{12}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{23}^2 \right]^{1/2}$$

## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
  1. Opérateur tangent local
  2. Opérateur tangent global 
  3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant



## Problème à l'instant $t_{n+1}$ : Formulation globale

Trouver  $\Delta \underline{u}_{n+1} \in C(\Delta \underline{u}_{n+1}^D)$  tel que  $R(\Delta \underline{u}_{n+1}; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

$$\text{avec } \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

### ➤ Mise en oeuvre de la méthode de Newton Raphson

➤ Procédure itérative : construction d'une séquence

$$\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}, \quad \text{i.e.} \quad \delta \underline{u}_n^{(k)} = \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} - \Delta \underline{u}_n^{(k)}$$

➤ Par linéarisation autour de  $\Delta \underline{u}_n^{(k)}$ :  $\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0$

➤ Opérateur tangent local  $\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n)$  (Le tenseur du 4ième)

Linéarisation de l'application  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) - \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) = \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + o(\|\delta \underline{\underline{\varepsilon}}\|) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + o(\|\delta \underline{\underline{\varepsilon}}\|)$$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}]$$

➤ Expression de l'application linéaire tangente globale

$$\langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV$$

## Algo 3 : Matrice de tangente élastoplastique élémentaire

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \sum_e \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{\varepsilon}}([\delta \underline{u}_n^{(k)}]) : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] d\Omega_e \\ &= \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}] \{\delta \underline{U}_n^{(k)}\} = \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \{\delta \underline{U}_n^{(k)}\} = [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^{\text{D}} \cdot \underline{w} dS \\ -\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\} &= \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{int}(k)}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}) \end{aligned}$$

### Algo 3 : Calcul éléments par éléments

**Entrée**  $\{\sigma_n\}$  (valeur aux points de Gauss),  $\{\Delta \underline{U}_e\}$

**Sorties**  $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$ ,  $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$  (matrices élémentaires)

$\{\sigma_{n+1}\}$ ,  $\{\Delta p\}$ ,  $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p\}$  (valeur aux points de Gauss)

## Algo 3 : Matrice de tangente élastoplastique élémentaire

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \sum_e \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{\varepsilon}}([\delta \underline{u}_n^{(k)}]) : \mathbf{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]) d\Omega_e \\ &= \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} T_{n+1}^{\text{D}} \cdot \underline{w} dS \\ -\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\} &= \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{int}(k)}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}) \end{aligned}$$

### Algo 3 : Calcul éléments par éléments

**Entrée**  $\{\sigma_n\}$  (valeur aux points de Gauss),  $\{\Delta \mathbb{U}_e\}$

**Sorties**  $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$ ,  $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$  (matrices élémentaires)

$\{\sigma_{n+1}\}$ ,  $\{\Delta p\}$ ,  $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}\}$  (valeur aux points de Gauss)

- (i) Initialisation de la matrice tangente élémentaire :  $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] = [0]$ ;
- (ii) Initialisation des forces nodales internes élémentaires :  $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} = \{0\}$ ;
- (iii) Pour  $g = 1, 2, \dots, G$  (boucle sur les points de Gauss  $\underline{a}_g$ , de poids  $w_g$ , de  $E_e$ ):
  - (a) Incrément de déformation :  $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{a}_g)\} = [B(\underline{a}_g)]\{\Delta \mathbb{U}_e\}$ ;
  - (b) Calcul de  $\{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\}$ ,  $\Delta p(\underline{a}_g)$  et  $[A^{\text{EP}}(\underline{a}_g)]$  (**Algo 4**)
  - (c) Contribution du point de Gauss à  $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$ :
 
$$[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] := [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] + [B(\underline{a}_g)]^T [A^{\text{EP}}(\underline{a}_g)] [B(\underline{a}_g)] J(\underline{a}_g) w_g$$
  - (d) Contribution du point de Gauss à  $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$ :
 
$$\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} := \{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} + [B(\underline{a}_g)]^T \{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\} J(\underline{a}_g) w_g$$

Contraintes & déformation plastiques doivent être **sauvegardée MAIS** seulement **aux points de Gauss**

## Algo 2 : Assemblage - $[K^{EP}]$ et $\{F^{int}\}$

**In** : List of nodal displacement increment  $\{\Delta U_n\}$

**Out** : Global tangent matrix  $[K^{EP}]$ , global nodal forces  $\{F^{\Delta u}\}$ ,  $\{F^{int}\}$ .

(i) Initialisation :  $[K^{EP}] = [0]$ ,  $\{F^{\Delta u}\} = \{0\}$ ,  $\{F^{int}\} = \{0\}$  ;

(ii) For  $e = 1, 2, \dots, N_E$  (loop over elements) :

**Procédure d'assemblage = comme en élasticité linéaire**

## Algo 2 : Assemblage - $[K^{EP}]$ et $\{F^{int}\}$

**In** : List of nodal displacement increment  $\{\Delta U_n\}$

**Out** : Global tangent matrix  $[K^{EP}]$ , global nodal forces  $\{F^{\Delta u}\}$ ,  $\{F^{int}\}$ .

(i) Initialisation :  $[K^{EP}] = [0]$ ,  $\{F^{\Delta u}\} = \{0\}$ ,  $\{F^{int}\} = \{0\}$  ;

(ii) For  $e = 1, 2, \dots, N_E$  (loop over elements) :

(a) Extract nodal values relevant to element  $\{\Delta U_{n,e}\}$  ;

(b) Compute  $[K_e^{EP}]$  and  $\{F_e^{int}\}$  **Algo 3**

(c) Assembly :  $[K_e^{EP}] \longrightarrow [K^{EP}]$ ,  $\{F^{\Delta u}\}$   
 $\{F_e^{int}\} \longrightarrow \{F^{int}\}$

**Procédure d'assemblage = comme en élasticité linéaire**

# Problème à l'instant $t_{n+1}$ : Formulation globale

Pas de temps (approche incrémentale)  $\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta \underline{u}_n$

Trouver  $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$  tel que  $R(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{w} \in C(\underline{0})$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

Itération en pas de temps  $\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}$

**Initialisation :**  $\Delta \underline{u}_n^{(1)} = \underline{0}$

**Itération 1:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}_n^{(1)} \in C(\Delta \underline{u}_n^{(D)}) \\ \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(1)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(1)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(1)} \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\delta \underline{u}_n^{(1)} = \underbrace{\delta \underline{u}_n^{(1,0)}}_{\in C(\underline{0})} + \underbrace{\Delta \underline{u}_n^{(D)}}_{\in C(\Delta \underline{u}_n^D)}$$

**Itération k --> k+1**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}_n^{(k)} \in C(\underline{0}) \\ \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV$$

## Algo 2 : Première itération

Time step

Iteration in time-step

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV =$$

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta \underline{u}_n \quad \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\Delta \underline{u}_n^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

► **Initialisation** :  $\Delta \underline{u}_n = \underline{0}$  ;

► **Iteration 1** : decomposition

$$\delta \underline{u}_n^{(1)} = \underbrace{\delta \underline{u}_n^{(1,0)}}_{\in \mathcal{C}(0)} + \underbrace{\Delta \underline{u}_n^{(D)}}_{\in \mathcal{C}(\Delta \underline{u}_n^D)}$$

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_n] \{\delta \underline{u}_n^{(k)}\}$$

Find  $\delta \underline{u}_n^{(1,0)} \in \mathcal{C}(0)$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(1,0)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV =$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n^{(D)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}_n^{\Delta u}\}$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}_n] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

$$- \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(1)}\} = \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_n^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\})$$

## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
  1. Opérateur tangent local
  2. Opérateur tangent global
  3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant





## Algo 1 :

Entrée : Maillage, temps  $t_0, \dots, t_M$ , Loi de comportement, chargement, tolérance  $\varepsilon$

### (a) Initialisation Générale


- (i) Conditions initiales  $\{\mathbf{U}_0\}, \{\boldsymbol{\sigma}_0\}, \{p_0\}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}_0^P\};$
- (ii) Initialisation :  $\{\mathbf{F}^{\text{int}}\} = \{0\}$   
Assemblage  $[\mathbb{K}^{\text{EP}}] = [\mathbb{K}], \{\mathbf{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta \underline{u}_0^D = \underline{u}_1^D - \underline{u}_0^D$

### (b) Pour chaque incrément de chargement : $n=0, 1, \dots, M-1$ , repeat

- (i) Initialisation :  $\{\Delta \mathbf{U}\} = \{0\};$
- (ii) Force nodales :  $\{\mathbf{F}^{\text{ext}}\} = \{\mathbf{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbf{F}_{n+1}^{\text{surf}}\};$
- (iii) Résidu :  $-\{\mathbb{R}\} = \{\mathbf{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\} + \{\mathbf{F}^{\Delta u}\}, r^{\text{ref}} = \|\{\mathbb{R}\}\|, r = r^{\text{ref}};$
- (iv) **Itérations** : Pour  $k = 1, \dots$  **et tant que**  $r > \varepsilon r^{\text{ref}}$ 
  - (a) Résoudre :  $[\mathbb{K}^{\text{EP}}]\{\delta \mathbf{U}\} := -\{\mathbb{R}\};$  Actualise :  $\{\Delta \mathbf{U}\} := \{\Delta \mathbf{U}\} + \{\delta \mathbf{U}\};$
  - (b) Assemblage :  $[K^{\text{EP}}(\Delta \mathbf{U})], \{\mathbf{F}^{\text{int}}(\Delta \mathbf{U})\}$  and  $\{\mathbf{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta \underline{u}_{n+1}^D$  **Algo 2**
  - (c) Résidu :  $\{\mathbb{R}\} := -\{\mathbf{F}^{\text{int}}\} - \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\}, r = \|\{\mathbb{R}\}\|.$
- (v) Actualise :  $\{\mathbf{U}_{n+1}\} = \{\mathbf{U}_n\} + \{\Delta \mathbf{U}\}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P\} = \{\underline{\underline{\varepsilon}}_n^P\} + \{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P\}.$

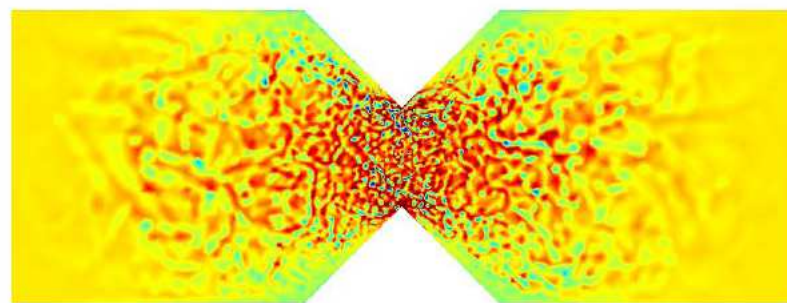
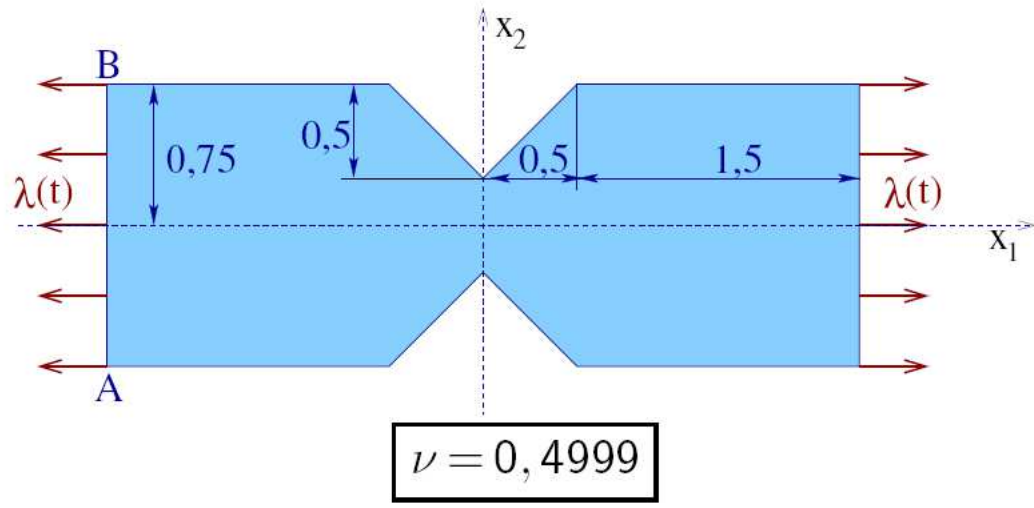
## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

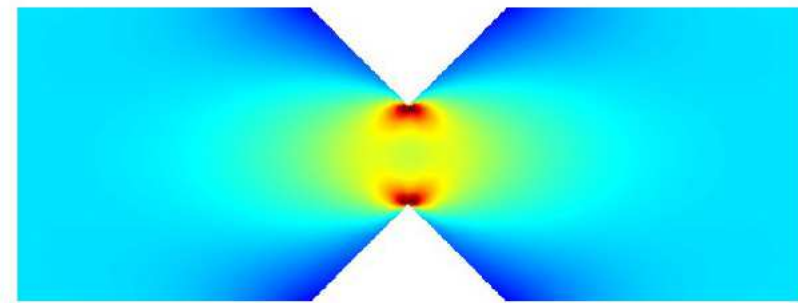
1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
  1. Opérateur tangent local
  2. Opérateur tangent global
  3. Algorithmes de résolution
  4. Quelques précautions ... 
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

# Attention : incompressibilité

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^P) = 0$$




(T3)



(T6)

## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
  2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
  3. **Méthode de Newton avec opérateur tangent constant**
- 

# Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

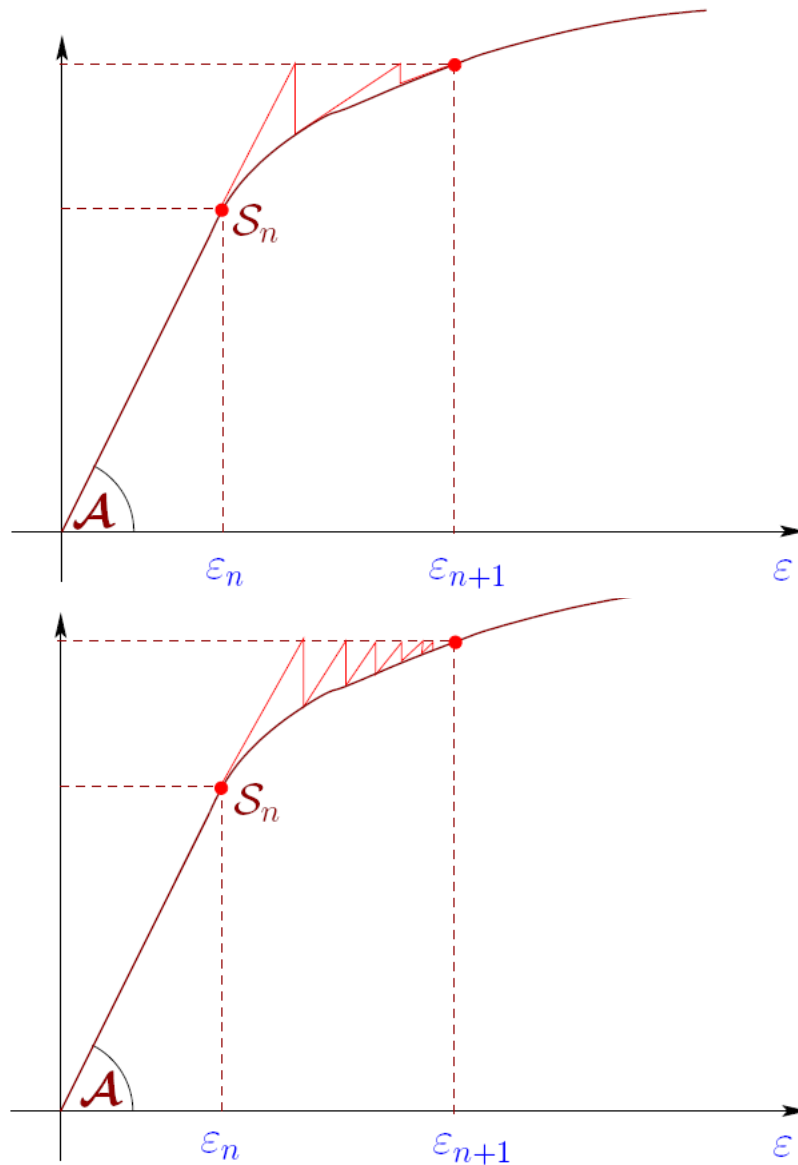
L'opérateur tangent cohérent  $[\mathbb{K}^{EP}]$

est remplacé par un opérateur constant  $[\hat{\mathbb{K}}]$

**Avantage :** simplification, réduction du coût CPU par itération

**Inconvénient :** Plus de convergence quadratique

# Interpretation




$[K^{EP}]$  (cohérente)

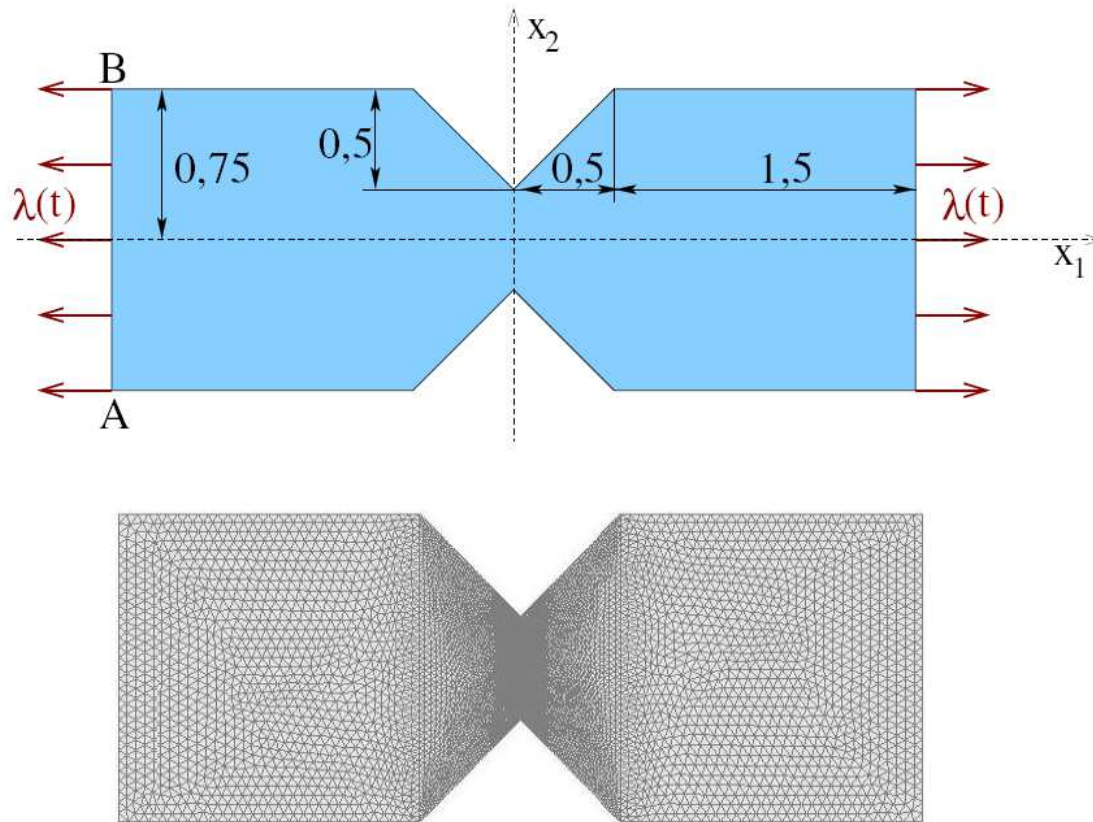
$[\hat{K}]$  (constant)

## Chapitre 3

### Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
4. **Exemples** 

# Exemple

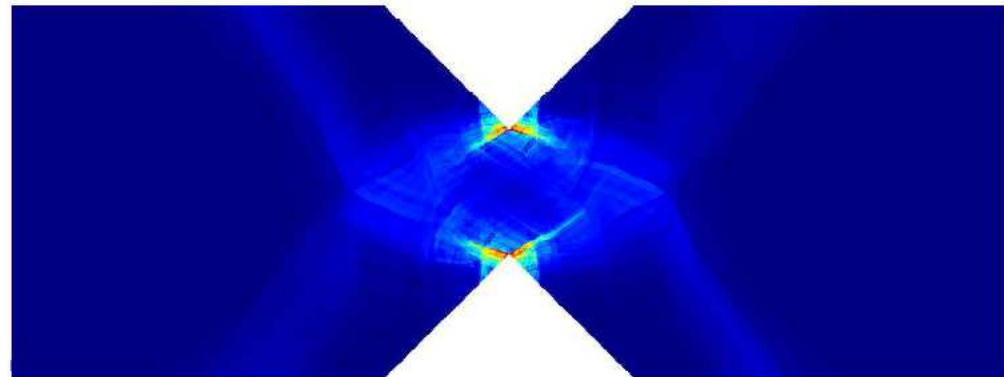
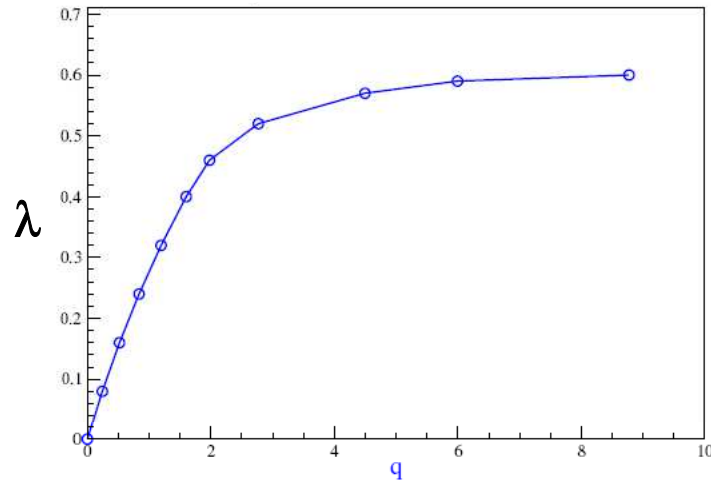


- ▶ Plane deformations
- ▶ Mesh : 8792 nodes, 17150 elements
- ▶ Constitutive law :  
 $R(p) = \sigma_0 + hp,$   
 $\sigma_0 = 0,88E,$   
 $\nu = 0,3,$   
 $h = 0$  or  $h = 0,05E$
- ▶ Constraints :  
 $u_1(A) = u_2(A) = u_1(B) = 0$   
(rigid body motions)



## (i) Elastic perfectly plastic material ( $h=0$ )

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,46	0,52	0,57	0,59	0,6



$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{EP}]$	1	4	4	4	4	5	6	7	8	8
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}_{n+1}^1]$	1	18	25	40	46	74	120	147	79	190
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$	1	18	44	109	227	380	821	1259	1396	3639

Number of iterations for each time step : Newton method with

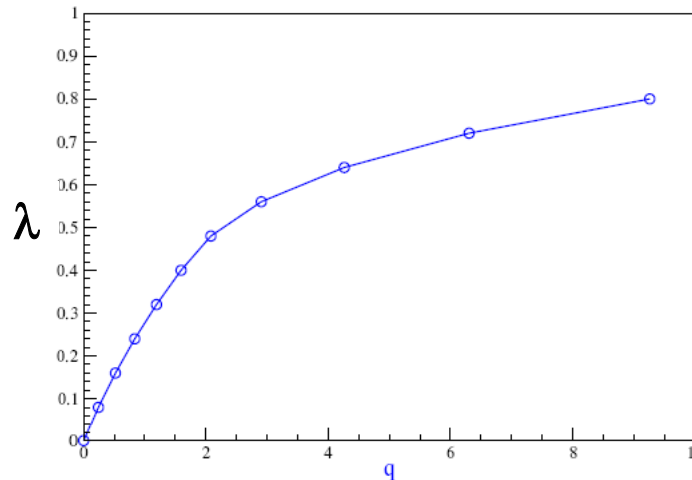
(a) consistent tangent matrix

(b) for every time step use the tangent matrix computed at first iteration

(c) elastic stiffness matrix.

## (ii) Elasto-plastic material with isotropic hardening ( $h=0.05E$ )

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,8



$n$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{EP}]$		1	3	3	3	4	5	5	5	5	5
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}_{n+1}^1]$		1	16	18	23	27	40	74	70	44	52
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$		1	16	34	54	59	80	102	113	128	147

Number of iterations for each time step : Newton method with

- (a) consistent tangent matrix
- (b) for every time step use the tangent matrix computed at first iteration
- (c) elastic stiffness matrix.

that's all folks