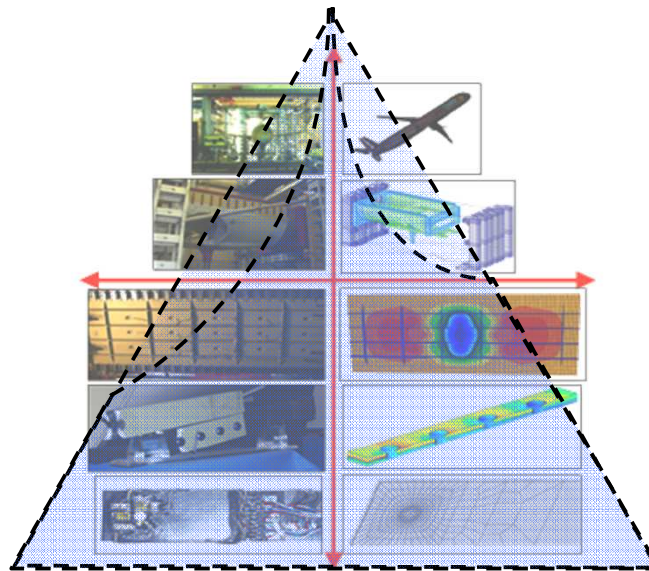


# Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

**Christian Rey**

[christian.rey@safran.fr](mailto:christian.rey@safran.fr)



# Plan du cours

1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin

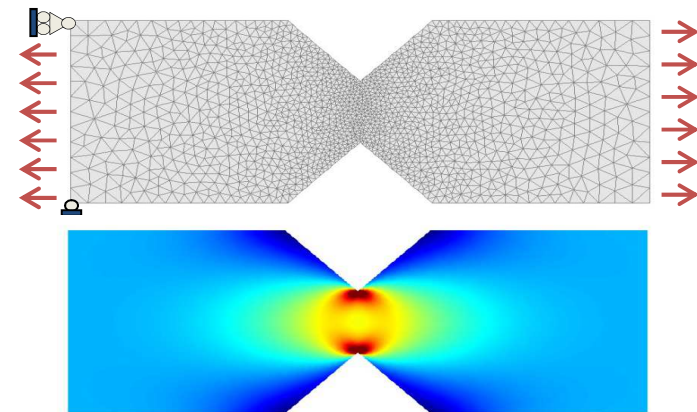
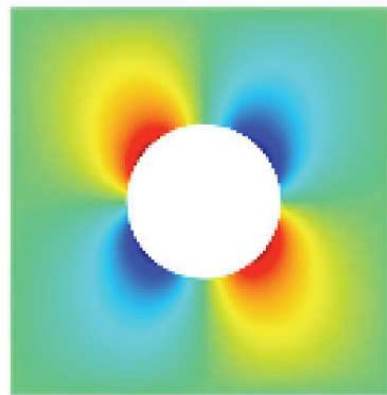
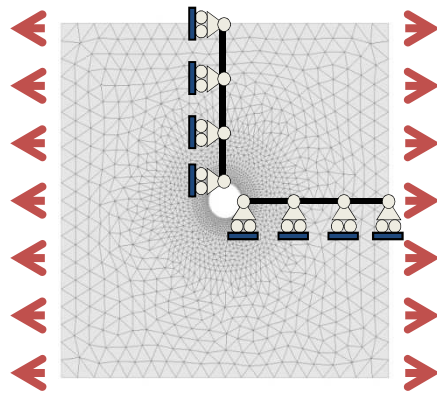
2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique

**3- La méthode des éléments finis**

4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires

5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux

6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

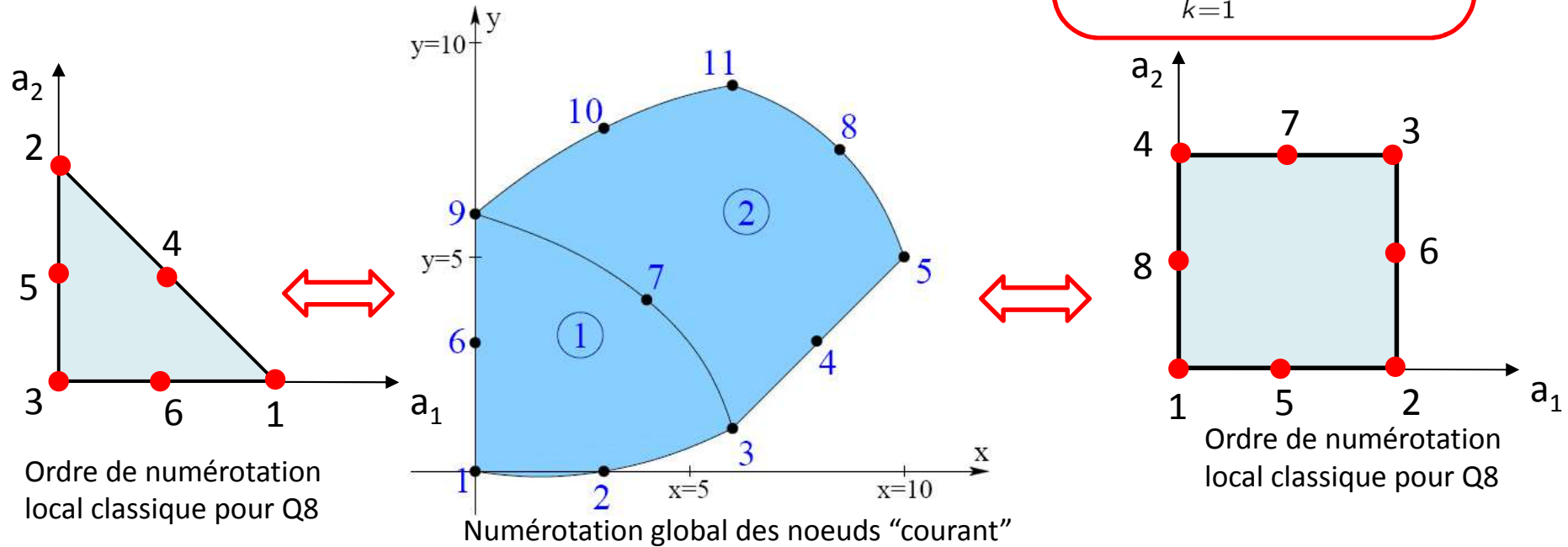
Convergence

# Éléments isoparamétrique:

les déplacements sont interpolés élément par élément en utilisation les même fonctions de formes que celles de la géométrie

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)}$$

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)}$$



	$n_e$	nodes							
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

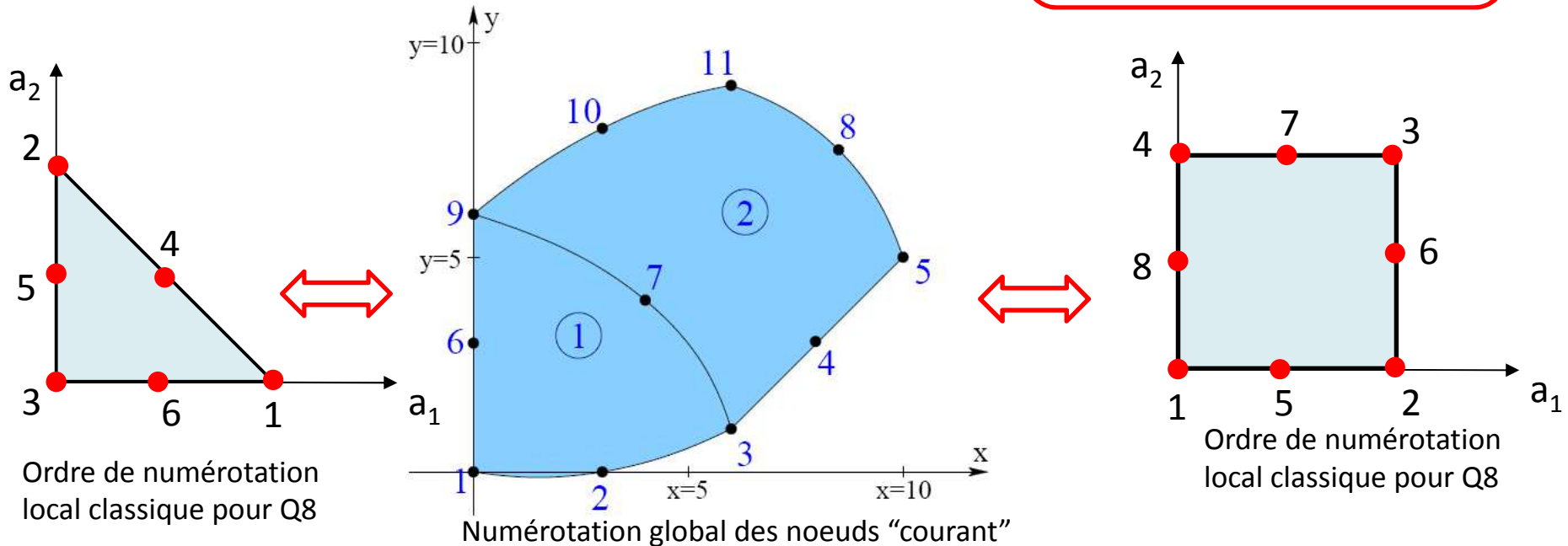
**connect(e, k)** = numéro global du noeud k (numérotation locale) de l'élément e

# Eléments isoparamétrique:

les déplacements sont interpolés élément par élément en utilisation les même fonctions de formes que celles de la géométrie

$$\{v_h(\underline{x})\} = [N(\underline{a})]\{\mathbb{V}_e\}$$

$$\{\underline{x}\} = [N(\underline{a})]\{X_e\}$$

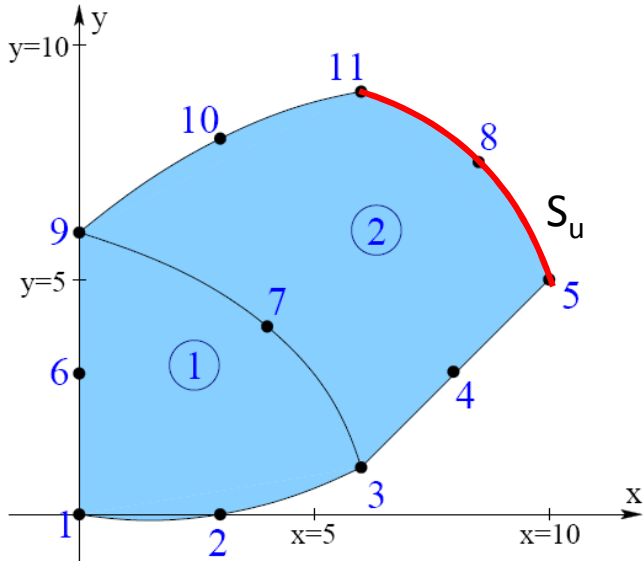


	$n_e$	nodes							
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T \longrightarrow \{\varepsilon[\underline{v}_h](\underline{x})\} = [B_e(\underline{a})]\{\mathbb{V}_e\}$$

Élément 1  $\{\mathbb{V}_e\} = \{v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_1^{(9)}, v_2^{(9)}, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_1^{(7)}, v_2^{(7)}, v_1^{(6)}, v_2^{(6)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}\}^T$

# La table dof



La table **dof**, associe un numéro à chaque composante nodale du déplacement

On commence par le noeud 1. On boucle sur tous les noeuds et toutes les directions ... on incrémente le compteur à chaque fois que l'on rencontre une inconnues nodales

**dof(n, j)** = numéro du "degré de liberté" de la composante "j" du champ de déplacement du noeud global "n"

connect

	$n_e$	nodes							
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

dof

1	2
3	4
5	6
7	8
<0	<0
9	10
11	12
<0	<0
13	14
15	16
<0	<0

Liste global des valeurs nodales inconnues et valeurs nodales du champ virtuel (même ordre)



$$\{U\} = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_1^{(6)}, u_2^{(6)}, u_1^{(7)}, u_2^{(7)}, u_1^{(9)}, u_2^{(9)}, u_1^{(10)}, u_2^{(10)}\}^T$$

$$\{W\} = \{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, w_1^{(4)}, w_2^{(4)}, w_1^{(6)}, w_2^{(6)}, \dots, w_1^{(10)}, w_2^{(10)}\}^T$$

# Interpolation globale des déplacements

Interpolation globale du déplacement inconnu  $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^{(D)})$  (

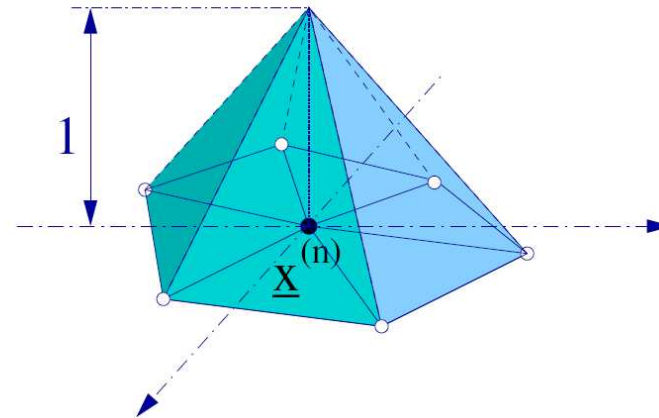
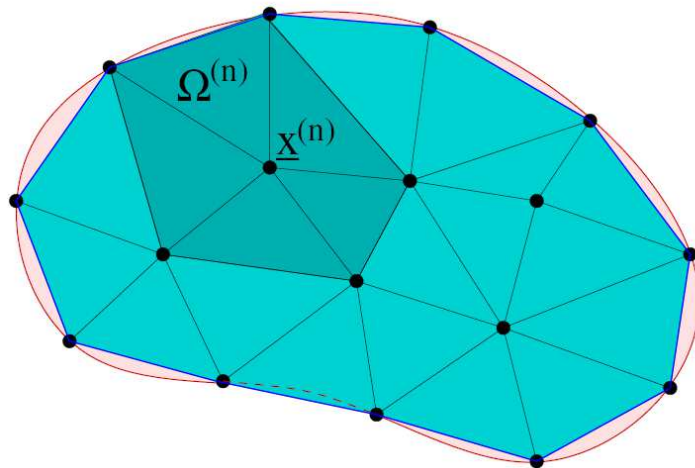
$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underbrace{[\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{U}\}}_{\underline{u}_h^{(0)}(\underline{x})} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champ virtuel  $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$  :

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{W}\}$$

Même numérotation des valeurs nodales

Numérotation est donnée par la table **dof**





# Méthode de Galerkin (forme faible)

La forme faible d'un problème d'élasticité linéaire:

$$\text{find } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ such that}$$
$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Le problème approché, s'écrit:

Trouver  $\underline{u}_N \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)$  tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w}_N \, dV + \int_{S_T} \underline{T} \cdot \underline{w}_N \, dS \quad \forall \underline{w}_N \in \mathcal{C}_N(\underline{0})$$

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \implies \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$$

$$\underline{w}_N(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x}) \quad \implies \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Conduit au système linéaire:  $\forall \{\alpha^*\} \in \mathbb{R}^N, \quad \{\alpha^*\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha^*\}^T \{\mathbb{F}\} = \{0\}$

$$\implies \boxed{[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}}$$

## Formulation du problème discrétisé avec éléments isoparamétriques

find  $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$  such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Interpolation globale du déplacement  $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^{(D)})$

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underline{u}_h^{(0)}(\underline{x}) + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champ virtuel  $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(0)$  :

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j$$

Ces champs sont ensuite utilisés dans la formulation faible:

$$\{\underline{W}\}^T ([\underline{K}]\{\underline{U}\} - \{\underline{F}^u\}) = \{\underline{W}\}^T \{\underline{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS = \{\underline{W}\}^T \{\underline{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)} + \underline{u}_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) dV = \{\underline{W}\}^T ([\underline{K}]\{\underline{U}\} - \{\underline{F}^u\})$$

# Formulation du problème discrétisé avec éléments isoparamétriques

$$\{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\}) = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)} + \underline{u}_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV = \{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\})$$

$$\sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j$$

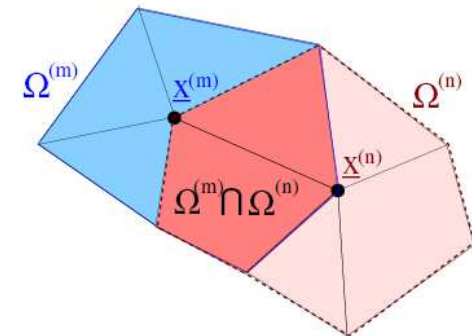
$$\sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j$$

$$w_i^{(m)}$$

$$u_j^{(n)}$$

$$\mathbb{K}_{PQ} = \int_{\Omega^{(m)} \cap \Omega^{(n)}} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j] \, dV(\underline{x})$$

$(P = \text{dof}(m, i) > 0, Q = \text{dof}(n, j) > 0)$



# Formulation du problème discrétisé avec éléments isoparamétriques

$$\{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\}) = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS = \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$$

$$\int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)} + \underline{u}_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV = \{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\})$$

$$\sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j$$

$$\sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j$$

$$w_i^{(m)}$$

$$\mathbb{F}_P^u = - \int_{\Omega^{(m)} \cap \Omega^{(n)}} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_m(\underline{x}) \underline{e}_i] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j] \, dV(\underline{x})$$

$$(P = \text{dof}(m, i) > 0, \text{dof}(n, j) < 0)$$

# Formulation du problème discrétisé avec éléments isoparamétriques

Les **fonctions de forme globale ne sont pas utilisées** explicitement dans la mise en oeuvre informatique

- mise en oeuvre **élément par élément** (en utilisant les fonctions de forme locales)
- Assemblage de la matrice globale

Possible de part la **propriété d'additivité** (par rapport aux éléments) des termes de la formulation faible

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^u\} = - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}](\underline{x}) \, dV$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ \int_{E_e} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\Gamma_T^e} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \right\} \quad (\Gamma_T^e = S_T \cap E_e)$$

1. Calcul des **intégrales "élémentaires"** (sur chaque éléments finis)
2. **Assemblage** globale des contributions (matrices et seconds membres)



## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

## Tenseur des déformations – Tenseur des contraintes

$$2[\varepsilon[\underline{v}_h]] = [H(\underline{a})][J(\underline{a})]^{-1} + [J(\underline{a})]^{-T} [H(\underline{a})]^T \quad [H(\underline{a})] = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) v_i^{(k)} \right]$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T$$

- ❑ Tenseur des déformations

$$\{\varepsilon[\underline{v}_h]\} = [B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Loi de comportement

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$$

Cas isotrope (3D)

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

- ❑ Tenseur des contraintes

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} = [A][B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Densité d'énergie de déformation

$$\sigma : \varepsilon = \varepsilon : A : \varepsilon = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \{V_e\}^T [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] \{V_e\}$$

## Matrice de rigidité élémentaire

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV$$

$$\begin{aligned} \{u(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})]\{U_e\} & \{\varepsilon[u_h](\underline{x})\} &= [B_e(\underline{a})]\{U_e\} \\ \{w(\underline{x})\} &= [N_e(\underline{a})]\{W_e\} & \{\varepsilon[w](\underline{x})\} &= [B_e(\underline{a})]\{W_e\} \end{aligned}$$

- ❑ Transport sur l'élément de référence  $\underline{x} \in E_e \rightarrow \underline{a} \in \Delta_e, \quad dV = J(\underline{a}) dV(\underline{a})$
- ❑ Densité d'énergie de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] = \{\varepsilon[w]\}^T [A] \{\varepsilon[u_h]\} = \{W_e\}^T [B(\underline{a})]^T [A] [B(\underline{a})] \{U_e\}$$

- ❑ Matrice de rigidité élémentaire

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV = \{W_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\} \{U_e\}$$

$$\begin{aligned} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV &= \{W_e\}^T [K_e] \{U_e\} \\ [K_e] &= \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \end{aligned}$$

Pour l'instant, on ne distingue pas (pour déplacement) les valeurs données de celles inconnues



## Second membre élémentaire (force de volume)

$$\begin{aligned}\{u(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})]\{U_e\} \\ \{w(\underline{x})\} &= [N_e(\underline{a})]\{W_e\}\end{aligned}$$

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\Gamma_e^e} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{vol}} + F_e^{\text{surf}}\} = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{ext}}\}$$

□ Cas des forces de volume

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV = \{W_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [N(\underline{a})]^T \{f(\underline{x}(\underline{a}))\} J_e(\underline{a}) \, dV(\underline{a}) \right\} = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{vol}}\}$$

- transport des intégrales sur l'élément de référence (espace paramétrique)
- Calcul des intégrales ?
- Evaluation analytique reste souvent impossible

## En vue de la prise en compte des conditions aux limites en déplacement

$$\{W\}^T \{F^u\} = - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w](x) dV \quad \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV = \{W_e\}^T [K_e] \{U_e\}$$

- Séparation des degrés de libertés (dof) dans l'élément

$$\{U_e\} = \begin{Bmatrix} U_e^{(0)} \\ U_e^{(D)} \end{Bmatrix} \quad \{W_e\} = \begin{Bmatrix} W_e^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [K_e] = \begin{bmatrix} K_e^{(00)} & K_e^{(0D)} \\ K_e^{(D0)} & K_e^{(DD)} \end{bmatrix}$$

- $[K_e^{(00)}]$  : contribution à la matrice de rigidité  $[K]$
- $-[K_e^{(0D)}]\{U_e^{(D)}\}$  : contribution au second membre  $\{F^u\}$

### Remarques :

- Les degrés de libertés ne sont pas ordonnés de cette manière !
- L'extraction des différentes contributions sera faite lors de l'opération d'assemblage (voir plus loin) **(en pratique rien n'est fait au niveau de l'élément)**

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

# Intégration numérique: quadrature de Gauss

## (a) Intégrales 1D

Poids de Gauss  $\swarrow$   $\searrow$  Point de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(a) da \approx \sum_{g=1}^G w_g f(a_g)$$

Formule avec G points de Gauss: exacte pour f(a) polynomial de degrés inférieur ou égal à 2G - 1

- $-1 < a_g < 1$  ( $1 \leq g \leq G$ ) pour les formules avec G points
- Symétrie: si  $(a_g, w_g)$  est un point de Gauss, alors  $(-a_g, w_g)$  aussi

Exemple (G=2, degrés 3):  $\int_{-1}^1 f(a) da \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$



Exemple (G=3, degrés 5):  $\int_{-1}^1 f(a) da \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$



# Intégration numérique: quadrature de Gauss

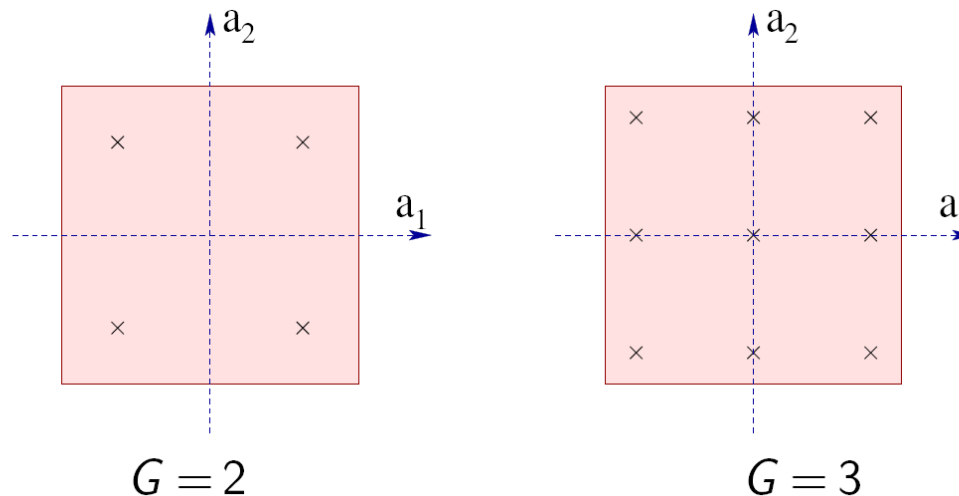
(a) Intégrales 1D

**(b) Intégrales 2D ou 3D sur des carrés ou des cubes**

Produit cartésien des formules 1D

$$\int_{C^2} f(a_1, a_2) da_1 da_2 \approx \sum_{g_1=1}^G \sum_{g_2=1}^G w_{g_1} w_{g_2} f(a_{g_1}, a_{g_2})$$

$$\int_{C^3} f(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3 \approx \sum_{g_1=1}^G \sum_{g_2=1}^G \sum_{g_3=1}^G w_{g_1} w_{g_2} w_{g_3} f(a_{g_1}, a_{g_2}, a_{g_3})$$



# Intégration numérique: quadrilatère bilinéaire

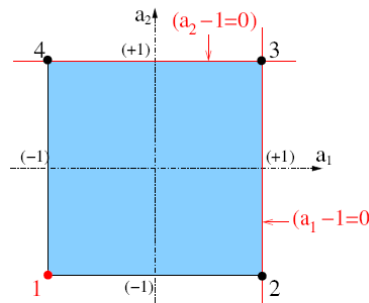
$$[\mathbb{K}_e] = \sum_{g_1=1}^G \sum_{g_2=1}^G [B_e(a_{g_1}, a_{g_2})]^T [A] [B_e(a_{g_1}, a_{g_2})] J_e(a_{g_1}, a_{g_2}) w_{g_1} w_{g_2}$$

## Choix de l'ordre de la quadrature:

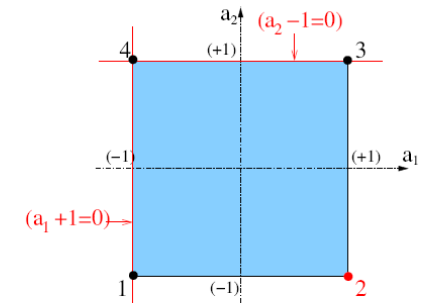
L'intégration numérique est dite être exact si, supposant que la **Matrix jacobienne est constante** (élément non déformé) la matrice de rigidité est intégrée de manière exacte.

Ici ... ?

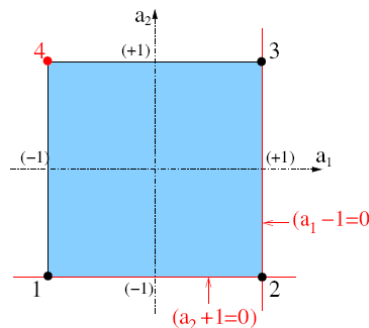
G=2 est suffisant  
 == > 4 points de Gauss



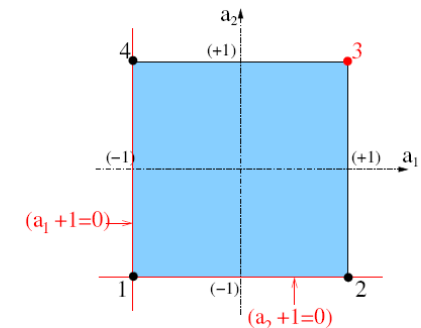
$$N_1(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 - a_2)/4$$



$$N_2(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 - a_2)/4$$



$$N_4(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 + a_2)/4$$



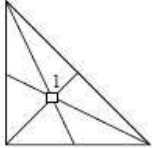
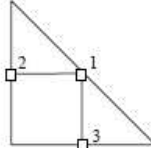
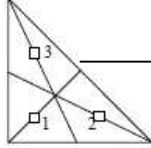
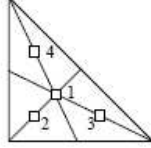
$$N_3(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 + a_2)/4$$

# Intégration numérique: quadrature de Gauss

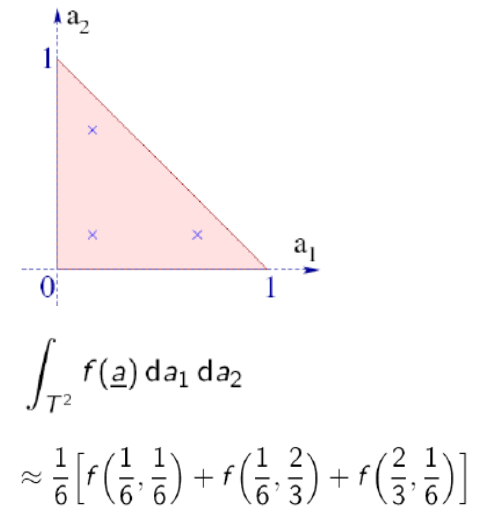
- (a) Intégrales 1D
- (b) Intégrales 2D ou 3D sur des carrés ou des cubes
- (c) Intégrales 2D ou 3D sur des triangles ou des tétraèdres**

$$\int_{T^2} f(\underline{a}) da_1 da_2 \approx \sum_{g=1}^G w_g f(\underline{a}_g)$$

## Règle de Gauss-Hammer

				
Ordre du polynôme (m)	1	2	2	3
Nombre de pt de Gauss (G)	1	3	3	4
Points de Gauss	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$
Poids de Gauss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{27}{96}$ $\frac{25}{96}$

### Exemple (m=2, G=3)



(Intégration exacte des polynômes de degrés  $p(x,y)=x^i y^j$  avec  $(i+j) \leq m$ )

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[K]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence



## Intégration numérique: modes parasites

- Energie de déformation (élémentaire)

$$W_e(\underline{w}) = \frac{1}{2} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) : A : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) dV = \frac{1}{2} \{\underline{W}_e\}^T [\underline{K}_e] \{\underline{W}_e\}$$

- En particulier  $W_e(\{\underline{W}_e^{\text{rigid}}\}) = 0$

Dimension du noyau de  $[\underline{K}_e] = 3$  en 2D, 6 en 3D

Rang ( $[\underline{K}_e]$ ) = (Nb noeuds de l'élément) x (Dim. géométrique) – (Nb modes rigides)

Taille de la matrice

- Intégration numérique:

$$[\underline{K}_e] = \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \cong \sum_{g=1}^G w_g [B_e(\underline{a}_g)]^T [A] [B_e(\underline{a}_g)] J_e(\underline{a}_g)$$

Si dimension du noyau est plus grande que 3 (2D) ou 6 (3D)

**== > modes parasites (modes à énergie nulle)**

## Intégration numérique: modes parasites

$$[\mathbb{K}_e] = \sum_{g=1}^G w_g [B_e(\underline{a}_g)]^T [A] [B_e(\underline{a}_g)] J_e(\underline{a}_g)$$

$$[\mathbb{K}_e] = \begin{bmatrix} [B_e(\underline{a}_1)]^T & \dots & [B_e(\underline{a}_G)]^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 J_e(\underline{a}_1) [A] & & \\ & \ddots & \\ & & w_G J_e(\underline{a}_G) [A] \end{bmatrix}}_{\text{inversible}} \begin{bmatrix} [B_e(\underline{a}_1)] \\ \vdots \\ [B_e(\underline{a}_G)] \end{bmatrix}$$

ainsi  $\text{Rang}([\mathbb{K}_e]) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} [B_e(\underline{a}_1)] \\ \vdots \\ [B_e(\underline{a}_G)] \end{bmatrix}\right)$

**Matrice carré :** 

Nb Lignes : Nb noeuds x (Dim geo)

Nb colonnes : Nb noeuds x (Dim geo)



**Matrice rectangulaire:**

Nb Lignes : Nb Gauss x (3 en 2D; 6 en 3D)

Nb colonnes : Nb noeuds x (Dim geo)

**En particulier, s'il n'y a pas suffisamment de points d'intégration == > modes à énergie nulle !**

# Intégration numérique: modes parasites

**Exemple: Triangle T3**

$$\text{Rang} ( [\mathbb{K}_e] ) = (3) \times 2 - (3) = 3$$

$[B_e(\underline{a})]$  : matrice 3 x 6

== > il faut au moins **1** points d'intégration

**Exemple: Quadrangle Q4**

$$\text{Rang} ( [\mathbb{K}_e] ) = (4) \times 2 - (3) = 5$$

$[B_e(\underline{a})]$  : matrice 3 x 8

== > il faut au moins **2** points d'intégration

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbb{K}]\{U\} = \{F\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

# Opération d'assemblage

Formellement, l'assemblage de la matrice  $[\mathbf{K}]$  et  $\{\mathbf{F}\}$  peut être réalisé en utilisant la relation:

$$\{\mathbf{W}\}^T ([\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} - \{\mathbf{F}^u\} - \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\}) = \sum_{e=1}^{N_E} \{\mathbf{W}_e\}^T ([\mathbf{K}_e]\{\mathbf{U}_e\} - \{\mathbf{F}_e^{\text{ext}}\})$$

- ▶  $[\mathbf{K}_e], \{\mathbf{F}_e^{\text{ext}}\}, \{\mathbf{U}_e\}, \{\mathbf{W}_e\}$  : Numérotation locale
- ▶  $[\mathbf{K}], \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\}, \{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{W}\}$  : Numérotation globale

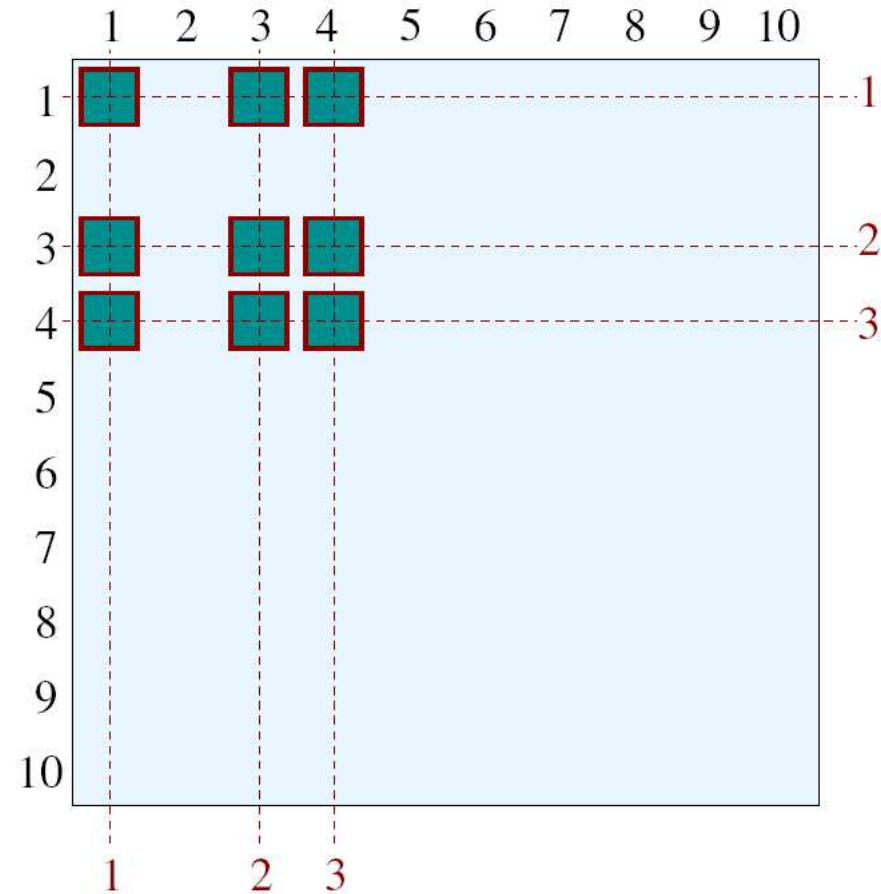
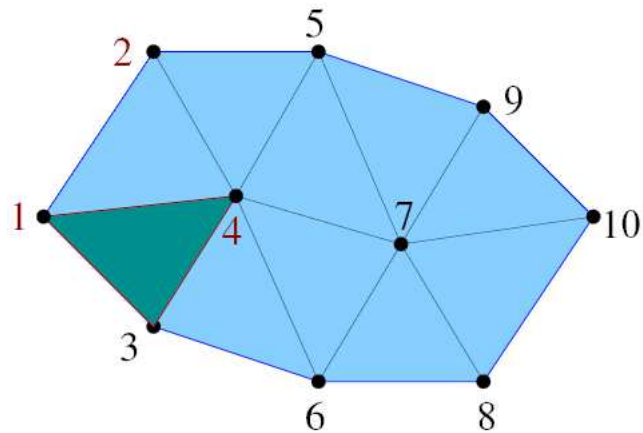
**Phase d'assemblage** de  $[\mathbf{K}]$  et  $\{\mathbf{F}\}$  :

- Calcul des matrices de rigidité et seconds membre **élémentaires**  $[\mathbf{K}_e], \{\mathbf{F}_e^{\text{ext}}\}$  :
- Remplir  $[\mathbf{K}], \{\mathbf{F}^u\}$  et  $\{\mathbf{F}^{\text{ext}}\}$  :

Utiliser la correspondance entre la numérotation locale et globale moyennant les tables connec et dof

# Exemple

Cas d'un problème scalaire: une inconnue par noeud



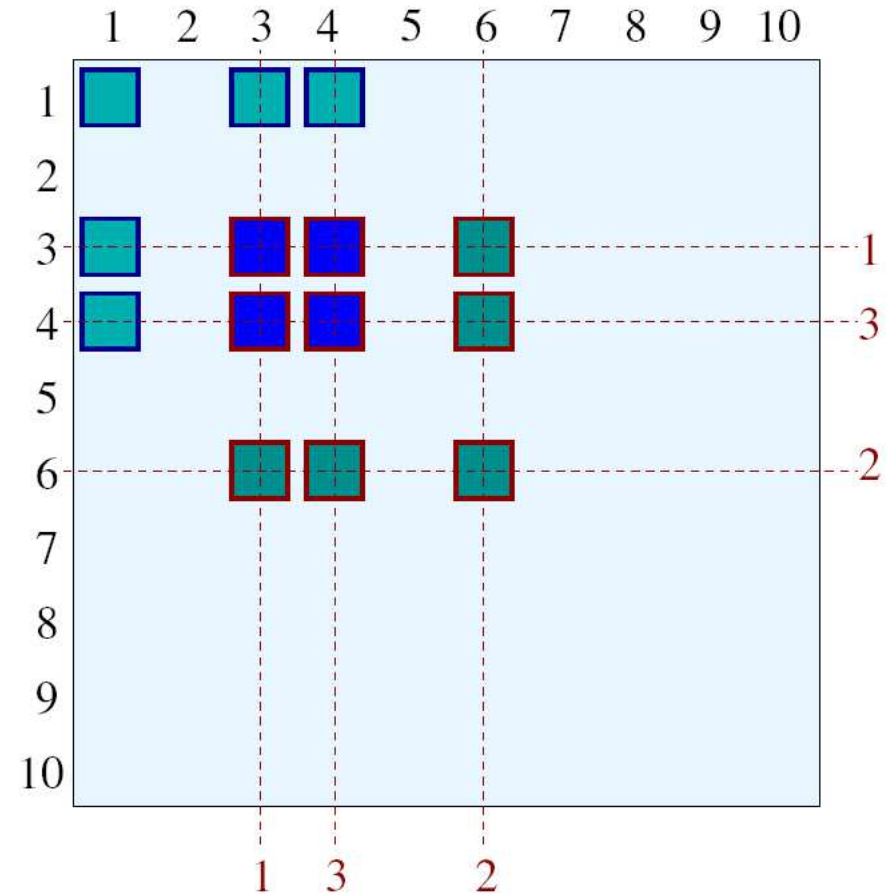
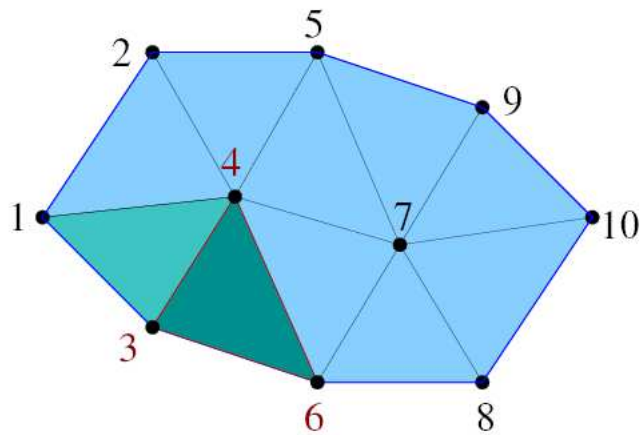
Ici par simplicité:

Pas de conditions limites

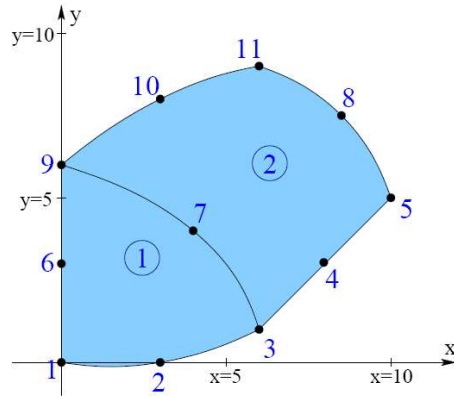
La numérotation globale des noeuds  
coincide avec la numérotation des  
valeurs nodales

# Exemple

Cas d'un problème scalaire: une inconnue par noeud



# Opération d'assemblage



connect

	$n_e$	nodes							
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

dof

1	2
3	4
5	6
7	8
<0	<0
9	10
11	12
<0	<0
13	14
15	16
<0	<0

$$\mathbb{K}_{PQ} = \int_{\Omega^{(m)} \cap \Omega^{(n)}} \underline{\underline{\epsilon}}[\tilde{N}_m(\underline{x})\underline{e}_i] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\epsilon}}[\tilde{N}_n(\underline{x})\underline{e}_j] dV(\underline{x})$$

( $P = \text{dof}(m, i) > 0$ ,  $Q = \text{dof}(n, j) > 0$ )

$$\{\mathbb{W}\}^T ([\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{F}^u\}) \leftarrow \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e]\{\mathbb{U}_e\}$$

Liste globale des valeurs nodales inconnues et valeurs nodales du champ virtuel (même ordre)

$$\{\mathbb{U}\} = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_1^{(6)}, u_2^{(6)}, u_1^{(7)}, u_2^{(7)}, u_1^{(9)}, u_2^{(9)}, u_1^{(10)}, u_2^{(10)}\}^T$$

$$\{\mathbb{W}\} = \{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, w_1^{(4)}, w_2^{(4)}, w_1^{(6)}, w_2^{(6)}, \dots, w_1^{(10)}, w_2^{(10)}\}^T$$

Liste des déplacements nodaux au niveau de l'élément (ex: élément 1 et 2)

$$\{\mathbb{U}_1\} = \{u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_1^{(9)}, u_2^{(9)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(7)}, u_2^{(7)}, u_1^{(6)}, u_2^{(6)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\}^T$$

$$\{\mathbb{U}_2\} = \{u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_1^{(5)}, u_2^{(5)}, u_1^{(11)}, u_2^{(11)}, u_1^{(9)}, u_2^{(9)}, u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_1^{(8)}, u_2^{(8)}, u_1^{(10)}, u_2^{(10)}, u_1^{(7)}, u_2^{(7)}\}^T$$

Pas de distinction entre valeurs nodales connues (CL) et inconnues

Liste des degrés de liberté au niveau de l'élément:

Pour l'élément 1:  $\text{dof}_e = \{5, 6, 13, 14, 1, 2, 11, 12, 9, 10, 3, 4\}^T$

Pour l'élément 2:  $\text{dof}_e = \{5, 6, <0, <0, <0, <0, 13, 14, 7, 8, <0, <0, 15, 16, 11, 12\}^T$



## Opération d'assemblage

- Initialisation :  $[\mathbb{K}] = [0]$  (matrice  $N \times N$ ),  $\{\mathbb{F}^u\} = \{0\}$  (liste  $N \times 1$ )
- Boucle sur les éléments: for  $1 \leq e \leq N_E$  :
  - Liste des noeuds (numéro globaux) de l'éléments  $E_e$   
 $node(n)=connec(n,:)$  ( $1 \leq n \leq e$ )
  - Restriction à l'élément  $E_e$  de la table dof  
 $dofe(j)=dof(k,j)$  ( $1 \leq j \leq D$ ) et ( $k \in node$ )
  - Construction de  $[\mathbb{K}_e]$
  - Contribution de  $[\mathbb{K}_e]$  dans  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}^u\}$  :  
for  $1 \leq p, q \leq Dn_e$  :  
$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}_{e,pq} \quad I = dofe(p) > 0, J = dofe(q) > 0$$
$$\mathbb{F}_I^u = \mathbb{F}_I^u - \mathbb{K}_{e,pq} U_{e,q}^{(D)} \quad I = dofe(p) > 0, dofe(q) < 0$$

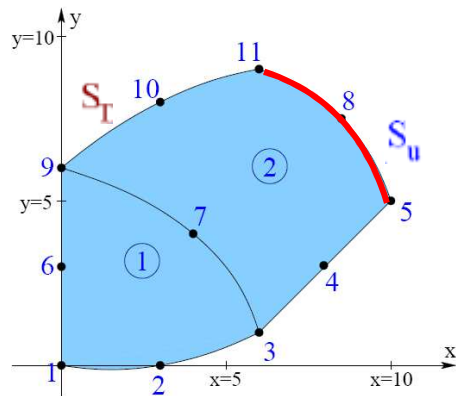
# Prise en compte des conditions aux limites en déplacement

for  $1 \leq p, q \leq Dn_e$  :

$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}_{e,pq} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, J = \text{dofe}(q) > 0$$

$$\mathbb{F}_I^u = \mathbb{F}_I^u - \mathbb{K}_{e,pq} U_{e,q}^{(D)} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, \text{dofe}(q) < 0$$

## Exemple



Element 1:  $[\mathbb{K}_e^{(00)}] = [\mathbb{K}_e]$

Element 2:  $[\mathbb{K}_e^{(00)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)})$ ,  
 $[\mathbb{K}_e^{(0D)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(D)})$

avec  $\mathcal{L}^{(0)} = \{1, 4, 5, 7, 8\}$   
 $\mathcal{L}^{(D)} = \{2, 3, 6\}$

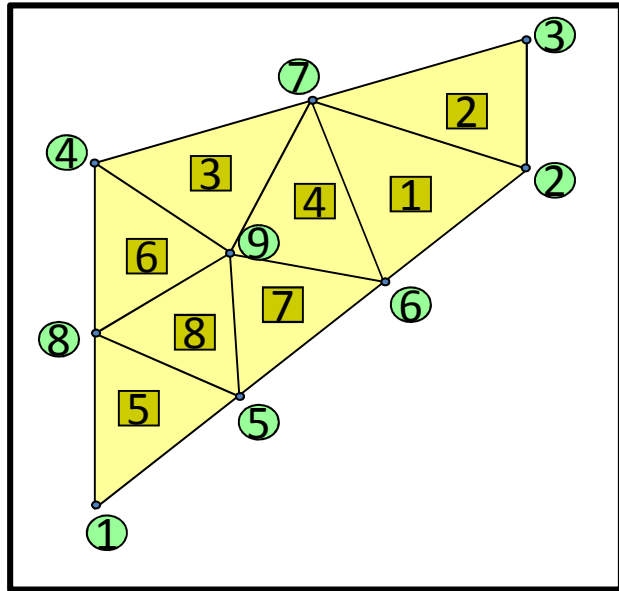


Numérotation locale des noeuds  
(chaque noeud à D=2 composantes)

1	2
3	4
5	6
7	8
<0	<0
9	10
11	12
<0	<0
13	14
15	16
<0	<0

	$n_e$	nodes							
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

# Opération d'assemblage



connect		
6	2	7
2	3	7
4	9	7
7	9	6
1	5	8
8	9	4
6	9	5
5	9	8

dof	
-1	-10
1	2
3	4
-4	-13
5	6
7	8
9	10
-8	-17
11	12

- Taille du système linéaire ?
- Que vaut le terme  $K(1,6)$  ?
- Comment calculer le terme  $K(1,4)$  ?
- Comment calculer le terme  $K(5,11)$  ?

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

## Propriétés de $[\mathbb{K}]$

- $[\mathbb{K}]$  est symétrique, définie positive

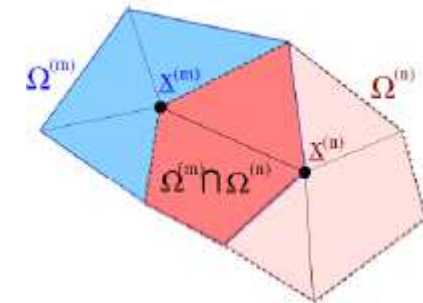
$$[\mathbb{K}] = [\mathbb{K}]^T, \quad \{\mathbf{U}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbf{U}\} > 0$$

Si tous les mouvements de corps rigide sont bloqués

- $[\mathbb{K}]$  est creuse:

$$\mathbb{K}_{PQ} = \int_{\Omega^{(m)} \cap \Omega^{(n)}} \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_m(\underline{x})\underline{e}_i] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\tilde{N}_n(\underline{x})\underline{e}_j] dV(\underline{x})$$

(P = dof(m, i) > 0, Q = dof(n, j) > 0)



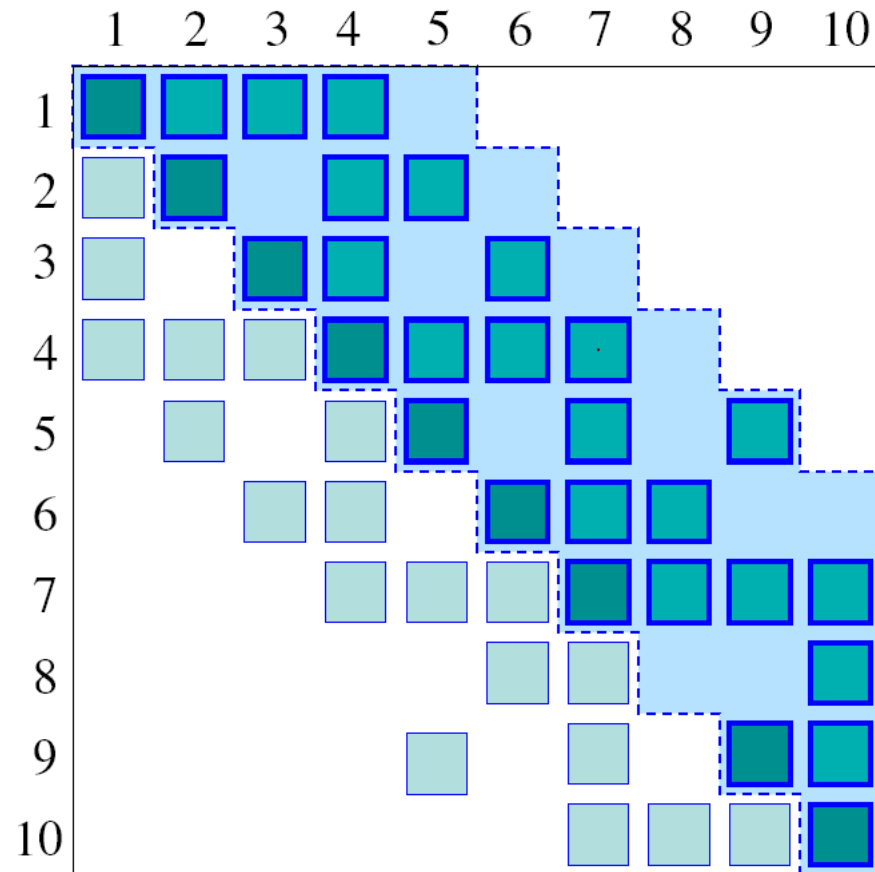
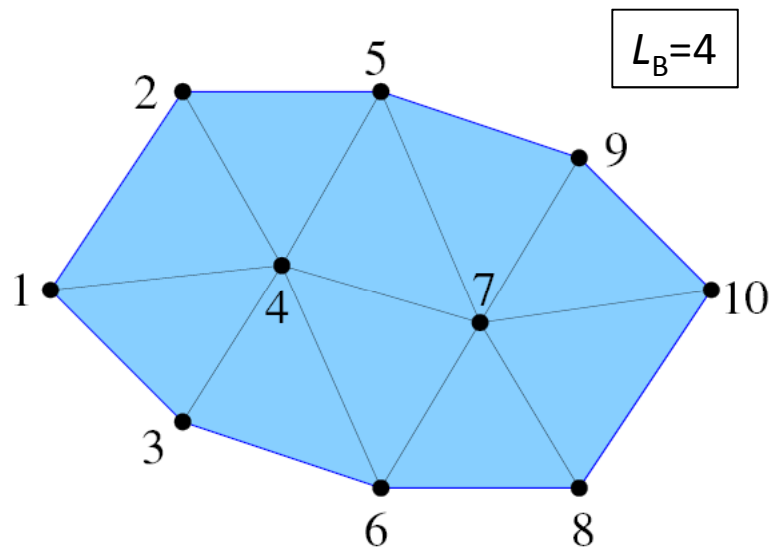
- Structure “bande” de  $[\mathbb{K}]$  et largeur de bande  $L_B$ :

$$|I - J| > L_B \Rightarrow \mathbb{K}_{IJ} = 0 \quad \text{avec} \quad L_B/N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

- Profile de  $[\mathbb{K}]$  :

$$L(J) = \min\{I \mid \mathbb{K}_{IJ} \neq 0\}$$

## Exemple

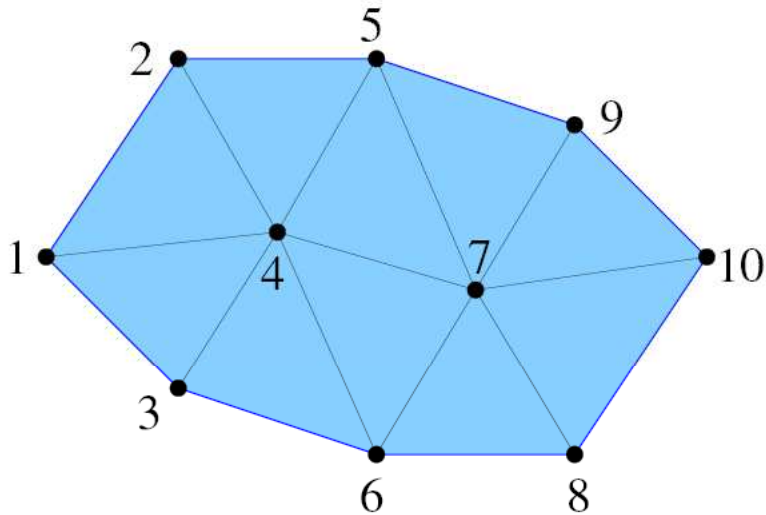


■ Terme diagonal      ■ Terme non diagonal

➤ Structure “bande” de  $\mathbb{K}$  et largeur de bande  $L_B$ :

$$|I - J| > L_B \Rightarrow \mathbb{K}_{IJ} = 0 \quad \text{avec} \quad L_B/N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

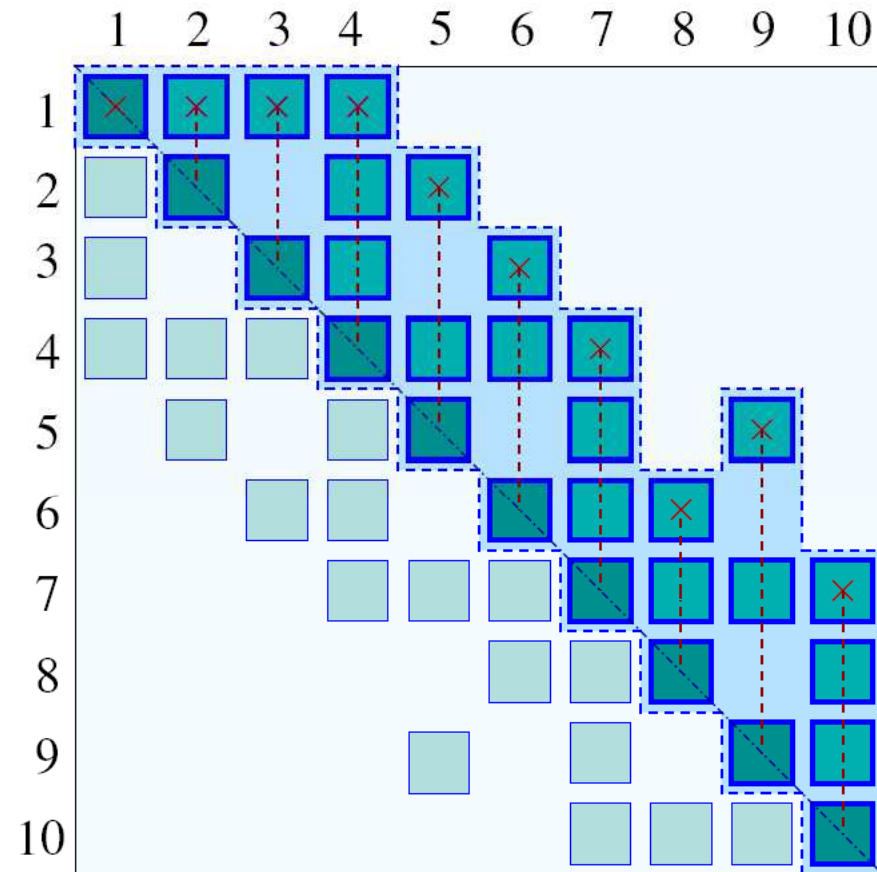
# Exemple



J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L(J)	1	1	1	1	2	3	4	6	5	7

➤ Profile de  $[\mathbb{K}]$  :

$$L(J) = \min\{I \mid \mathbb{K}_{IJ} \neq 0\}$$



Terme diagonal       Terme non diagonal

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

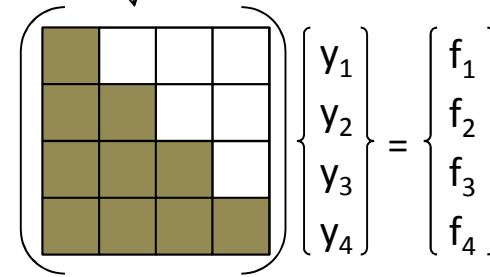
Postprocessing de la solution

Convergence



# Solveur direct

**Remarque:** Si la matrice du système linéaire est diagonale ou triangulaire (ex. inférieure),  
La résolution est triviale



➤ **Factorisation de Cholesky**  $[K] = [L][D][L]^T$

- $[D]$  : matrice diagonale définie positive ( $D_{ii} > 0$  pour tout  $i$ )
- $[L]$  : matrice triangulaire inférieure, avec diagonal unité ( $L_{ii} = 1$  pour tout  $i$ )

➤ **Résolution du système linéaire:**

$$[L][D][L]^T \{U\} = \{F\} \implies \begin{cases} [L] \{Z\} = \{F\} \\ [L]^T \{U\} = [D]^{-1} \{Z\} \end{cases}$$

The equations in the red box are:  $[L] \{Z\} = \{F\}$  and  $[L]^T \{U\} = [D]^{-1} \{Z\}$ .

## Factorisation de Cholesky $[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T$

Lien entre les coefficients de  $[\mathbf{K}]$  et ceux de  $[\mathbf{D}]$ ,  $[\mathbf{L}]$

$$\mathbf{K}_{JJ} = \mathbf{D}_{JJ} + \sum_{K=1}^{J-1} \mathbf{L}_{JK}^2 \mathbf{D}_{KK} \quad (1 \leq J \leq N) \quad (\text{a})$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{L}_{JI} \mathbf{D}_{II} + \sum_{K=1}^{I-1} \mathbf{L}_{IK} \mathbf{L}_{JK} \mathbf{D}_{KK} \quad (1 \leq I \leq J-1, 2 \leq J \leq N) \quad (\text{b})$$

- $J=1$  (Initialisation): le coefficient  $\mathbf{D}_{11}$  est déterminé avec (a)

$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{K}_{11}$$

- $J=2, \dots, N$  : les coefficients  $\mathbf{L}_{JI}$  sont donnés par (b) pour tout  $(1 \leq I \leq J-1)$

$$\mathbf{L}_{JI} = \frac{1}{\mathbf{D}_{II}} \left[ \mathbf{K}_{IJ} - \sum_{K=1}^{I-1} \mathbf{L}_{IK} \mathbf{L}_{JK} \mathbf{D}_{KK} \right] \quad (1 \leq I \leq J-1)$$

- Le coefficient  $\mathbf{D}_{JJ}$  est ensuite calculé avec (a)

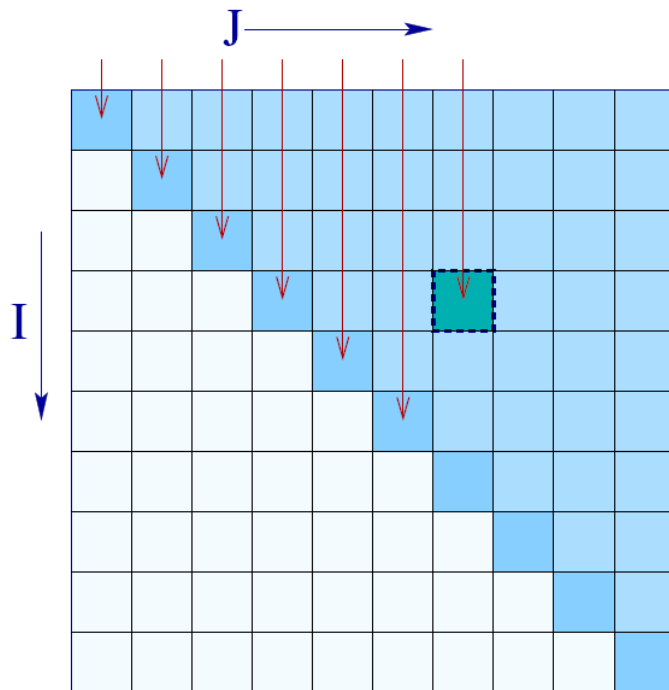
$$\mathbf{D}_{JJ} = \mathbf{K}_{JJ} - \sum_{K=1}^{J-1} \mathbf{L}_{JK}^2 \mathbf{D}_{KK}$$

# Factorisation de Cholesky $[\mathbb{K}] = [\mathbb{L}][\mathbb{D}][\mathbb{L}]^T$

Lien entre les coefficients de  $[\mathbb{K}]$  et ceux de  $[\mathbb{D}]$ ,  $[\mathbb{L}]$

$$K_{JJ} = D_{JJ} + \sum_{K=1}^{J-1} L_{JK}^2 D_{KK} \quad (1 \leq J \leq N) \quad (a)$$

$$K_{IJ} = L_{JI} D_{II} + \sum_{K=1}^{I-1} L_{IK} L_{JK} D_{KK} \quad (1 \leq I \leq J-1, 2 \leq J \leq N) \quad (b)$$



**Remarque:**  
 En utilisant **la commande Matlab “\”**,  
 une matrice symétrique définie positive est  
 automatiquement reconnue et une factorisation  
 de Cholesky est utilisée

## Stockage de la matrice en mémoire

- **La décomposition de Cholesky conserve la largeur de bande et le profile de la matrice initiale**

Si  $[\mathbb{K}]$  a un profile défini par  $L(J)$ , alors  $[\mathbb{L}]^T$  à au moins le même profile;

Si  $[\mathbb{K}]$  a une largeur de bande  $L_B$ , alors  $[\mathbb{L}]^T$  à au moins la même largeur de bande;

En revanche  $\mathbb{K}_{IJ} = 0 \ (L(J) \leq I \leq J) \not\Rightarrow \mathbb{L}_{IJ} = 0$

- **Le stockage de toute la matrice  $[\mathbb{K}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  n'est pas nécessaire et doit être évité !**

**Minimisation de la largeur de bande de  $[\mathbb{K}]$  :**

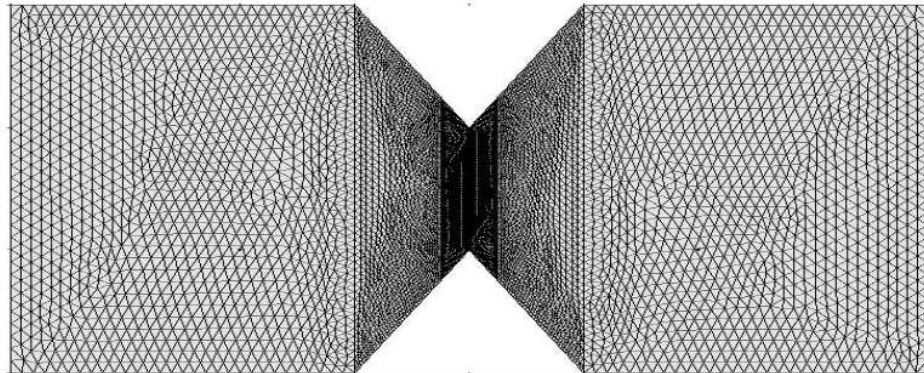
renumérotation des noeuds avec l'algorithme de Cuthill-McKee (Matlab; symrcm)

Minimiser l'écart maximum sur les éléments entre les numéros des noeuds:

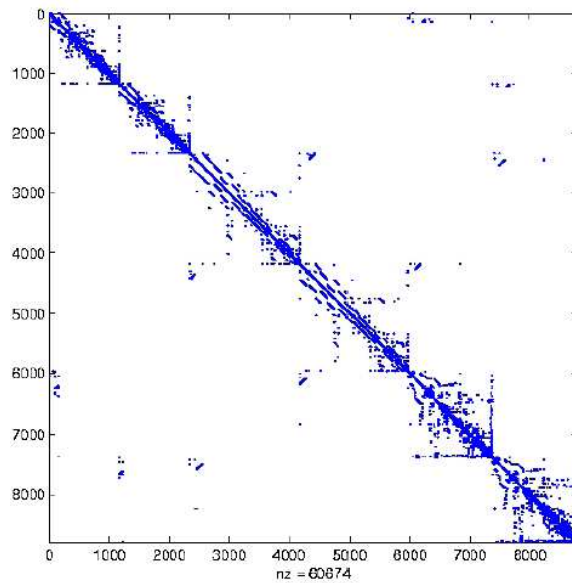
$\text{Max}_e ( \max(\text{elements}(e).\text{nodes}(1:\text{ne}) - \min(\text{elements}(e).\text{nodes}(1:\text{ne}) )$

# Exemple

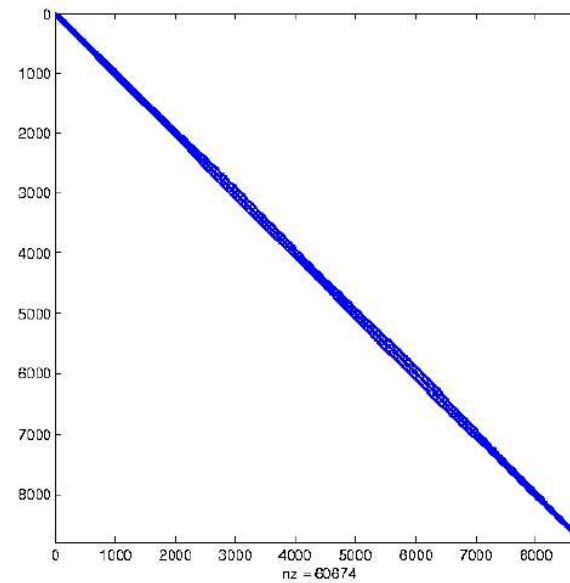
Rénumérotation des noeuds (Algorithme de Cuthill-McKee)



17150 elements T3  
8762 nodes.



Before



After ( $L_B/N = 0.0137$ )

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

## Solveurs itératifs

- Si  $N$  est grand: le stockage de la matrice  $[\mathbb{K}]$  peut se révéler impossible
- Une alternative : les solveurs itératifs

Construction d'une séquence  $\{\mathbf{U}^{(k)}\} (k \geq 0)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathbf{U}^{(k)}\} = \{\mathbf{U}\}$

Plutôt que de stocker la matrice  $[\mathbb{K}]$ , les coefficients sont recalculés à chaque itération

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} = \{\mathbb{F}\} - [\mathbb{K}]\{\mathbf{U}^{(k)}\} \quad (k \geq 0)$$

Lien avec la minimisation de la fonctionnelle énergie potentielle:  
algorithme du gradient conjugué

$$\{\mathbf{U}\} = \arg \min_{\{\mathbf{V}\}} P(\{\mathbf{V}\}), \quad P(\{\mathbf{V}\}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{V}\}[\mathbb{K}]\{\mathbf{V}\} - \{\mathbf{V}\}^T \{\mathbb{F}\} + \text{Cste}$$

Dans ce cas: stockage de type Morse

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence



## Post-processing

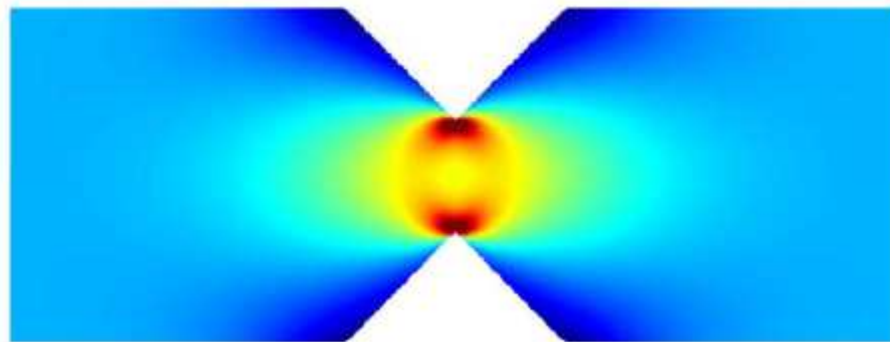
- Calcul des déformations et des contraintes **aux points de Gauss de chaque élément**

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h](\underline{x}_g) = [B_e(\underline{a}_g)]\{\underline{U}_e\}$$

aux points de Gauss de l'élément

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}_h](\underline{x}_g) = [A][B_e(\underline{a}_g)]\{\underline{U}_e\}$$

- Visualisation



Visualisation de  $\sigma_{xx}$

Les valeurs du champs  $\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}_h](\underline{x}_g)$  aux points de Gauss sont “extrapolés” aux noeuds  
(différentes techniques – ZZ technique ...)

Le champ continu  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_h$  est ensuite tracer par interpolation aux valeurs nodales ...

## La méthode des éléments finis

### 1. Formulation du problème discrétisé avec des éléments isoparamétriques

### 2. Matrices & seconds membres élémentaires

Définition et calcul

Intégration numérique: quadrature de Gauss

Intégration numérique: modes parasites

### 3. Opération d'assemblage

### 4. Le système linéaire global et sa résolution numérique $[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$

Propriété de la matrice

Solveurs directs

Solveur itératifs

Postprocessing de la solution

Convergence

## Méthode de Galerkin: Quelques propriétés importantes (2/2)

Calculons l'énergie de déformation de  $\underline{u} - \underline{v}_N = \Delta \underline{u} + (\underline{u}_N - \underline{v}_N)$

Avec le champ cinématiquement admissible arbitraire  $\underline{v}_N = \underline{u}^{(D)} + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K$

(on a toujours ...  $\underline{u} - \underline{u}_N = \Delta \underline{u}$ )

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV \\ & \quad + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV}_{=0 \text{ (orthogonality)}} \end{aligned}$$

**Propriété de meilleure approximation:**

$\underline{u}_N$  est la meilleure approximation de la solution exacte  $\underline{u}$

dans l'espace d'approximation choisi (au sens de la norme énergétique):

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV$$

# Convergence

## ➤ Intuitivement

- Si on suppose que l'approximation éléments finis permet une représentation exacte des déplacements polynomiaux de degrés  $p$
- Sur chaque élément

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}^0) + \nabla \underline{u}(\underline{x}^0) \cdot [\underline{x} - \underline{x}^0] + \nabla \nabla \underline{u}(\underline{x}^0) : [(\underline{x} - \underline{x}^0) \otimes (\underline{x} - \underline{x}^0)] + \dots + O(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|^{p+1}) \quad (\underline{x}, \underline{x}^0 \in E_e)$$

## Erreur de la solution approchée

$$\begin{aligned} \|\underline{u}(\underline{x}) - \underline{u}_h(\underline{x})\| &= O(h^{p+1}) \\ \|\underline{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}) - \underline{\varepsilon}[\underline{u}_h](\underline{x})\| &= O(h^p), \quad \|\underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{\sigma}(\underline{x})\| = O(h^p) \end{aligned} \quad (\underline{x} \in E_e)$$

## ➤ De manière rigoureuse, on a:

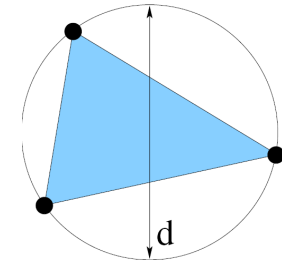
- Si  $\|\underline{u}\|_{\mathbf{E}} < +\infty$ , alors  $\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{E}} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) (convergence)
- Si  $\|\underline{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)} < +\infty$ , avec  $(p+1) > D/2$ , et si l'interpolation peut représenter sur chaque éléments  $E_e$  les polynômes de degrés  $\leq p$

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{\mathbf{E}} \leq Ch^p \|\underline{u}\|_{H^{p+1}(\Omega)}$$

Les éléments finis isoparamétrique, on a au moins  $p=1$

Semi-normes:

$$\|\underline{u}\|_{\mathbf{E}}^2 = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{u}] \, dV \quad \|\underline{u}\|_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla^{(k)} \underline{u}\|^2 \, dV$$



$$h = \max_{\text{elements}} d$$

# Convergence

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{H^m} \leq Ch^\alpha \|\underline{u}\|_{H^r}$$

Éléments isoparamétrique  
k=1 au moins

$$\alpha = \min(k+1-m, r-m)$$

où k est le degré max du polynôme qui peut être représenté par l'interpolation dans le système de coordonnées "courant" ( $x_1, x_2, x_3$ )

- Si la solution est suffisamment régulière
  - Elements T3 et Q4; k=1 : convergence linéaire
  - Elements T6 et Q8 ou Q9; k=2 : convergence quadratique
- Si la solution n'est pas suffisamment régulière (*ex: dynamique, fissure, lois de cpt nonlinéaire ....*)
  - "r-m" dans  $\alpha$  devient le facteur limitant indépendamment de k
  - Les éléments d'ordre élevé sont alors d'intérêt plus limité

Si les bords sont droits !!

Ceci explique qu'historiquement, l'attention s'est plus particulièrement portée sur les éléments d'ordre peu élevé

that's all folks