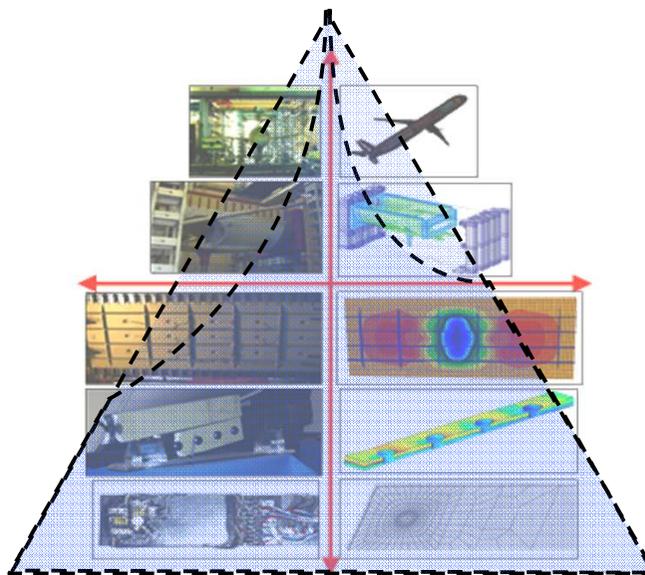


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Christian Rey

christian.rey@safran.fr



Plan du cours

1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin

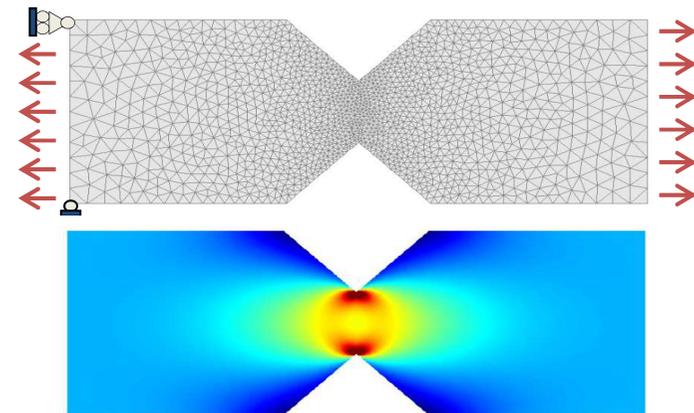
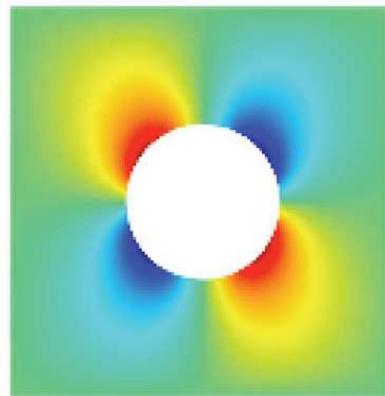
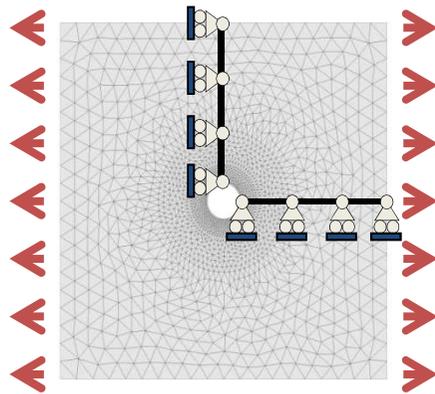
2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique

3- La méthode des éléments finis

4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires

5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux

6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

Eléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Eléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Méthode de Galerkin (forme faible)

La forme faible d'un problème d'élasticité linéaire (1ère variante – sans la réaction inconnues):

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Le problème approché, s'écrit:

Trouver $\underline{u}_N \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w}_N dV + \int_{S_T} \underline{T} \cdot \underline{w}_N dS \quad \forall \underline{w}_N \in \mathcal{C}_N(\underline{0})$$

$$\mathcal{C}_N(\underline{u}^D) = \{\underline{u}^{(D)}(\underline{x})\} + \text{span}\{\underline{\varphi}^K(\underline{x}), K=1, \dots, N\} \subset \mathcal{C}(\underline{u}^D)$$

$$\mathcal{C}_N(\underline{0}) = \text{span}\{\underline{\varphi}^K(\underline{x}), K=1, \dots, N\} \subset \mathcal{C}(\underline{0})$$

Système linéaire:

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \underline{w}_N(\underline{x}) = \sum_{K=1}^N \alpha_K^* \underline{\varphi}^K(\underline{x})$$

$$[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

Méthode de Galerkin (Principe du minimum)

Minimisation de l'énergie potentielle totale

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}) \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV \\ \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS \end{aligned}$$

Le problème approché, s'écrit:

$$\underline{u}_N = \arg \min_{\underline{v}_N \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}_N)$$

Système linéaire:

$$[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

$$\mathcal{C}_N(\underline{u}^D) = \{\underline{u}^{(D)}(\underline{x})\} + \text{span}\{\varphi^K(\underline{x}), K=1, \dots, N\} \subset \mathcal{C}(\underline{u}^D)$$

==> construction des fonctions de bases

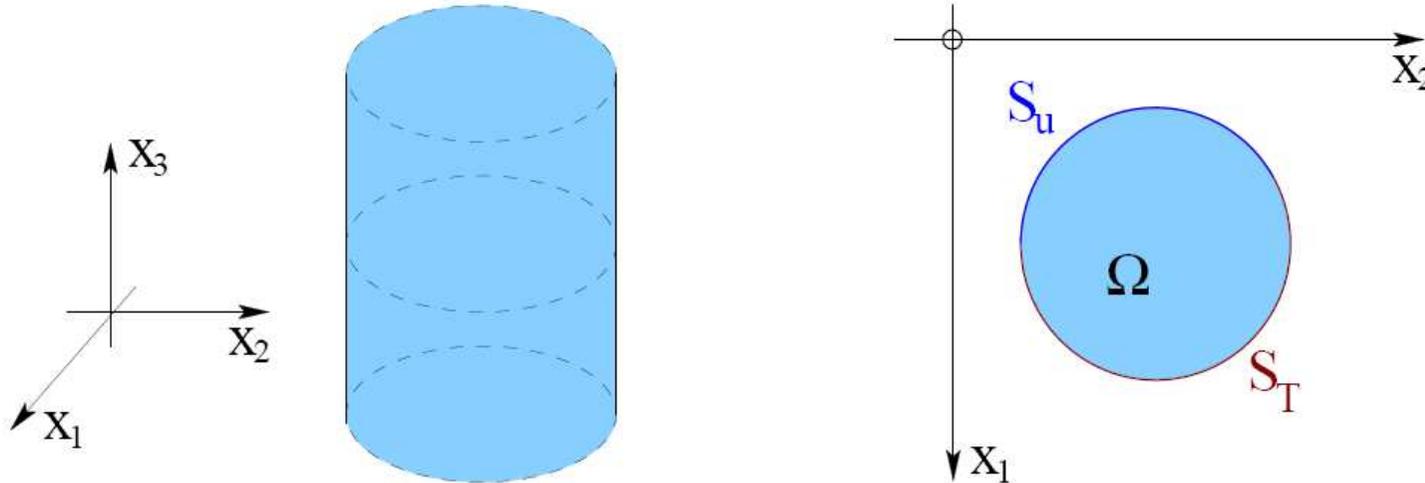
$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^J] \, dV \quad (1 \leq I, J \leq N)$$

$$F_I = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] \, dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\varphi}^I \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\varphi}^I \, dS \quad (1 \leq I \leq N)$$

Si les fonctions de bases ont un **support local** la matrice de rigidité est **creuse**

Exemple 2D: Hypothèse des déformations planes

La solution est invariante par rapport à x_3



Le champ de déplacement est de la forme:

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$$

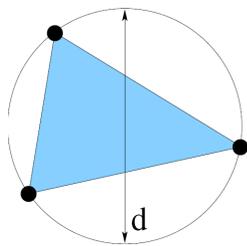
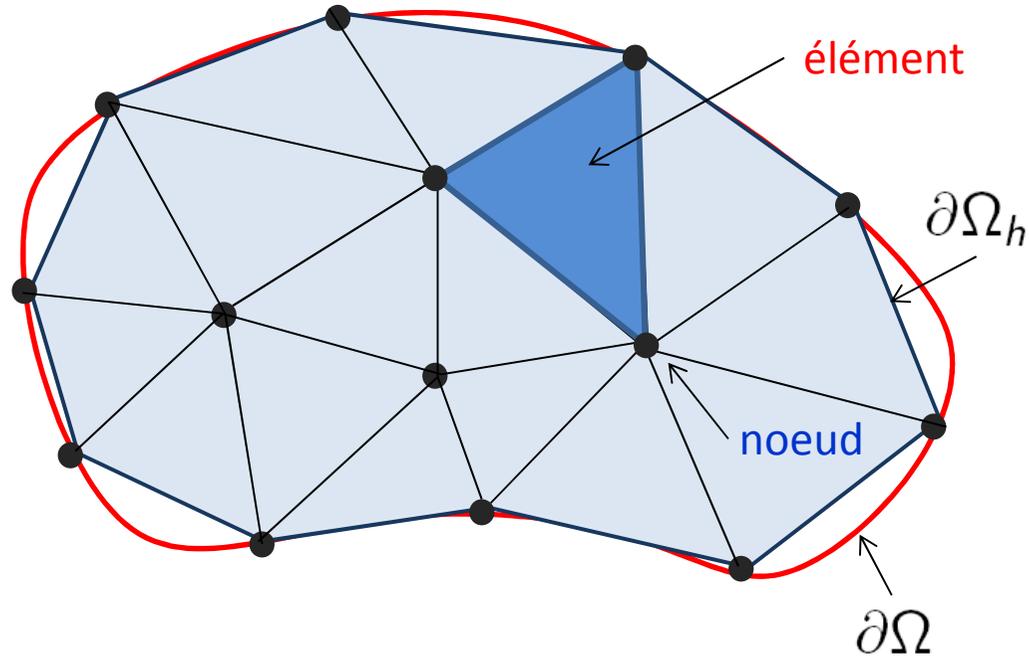
$u_3 = 0$;
 u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_3

conduisant à :

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Autre cas: contrainte plane
 $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$

Maillage

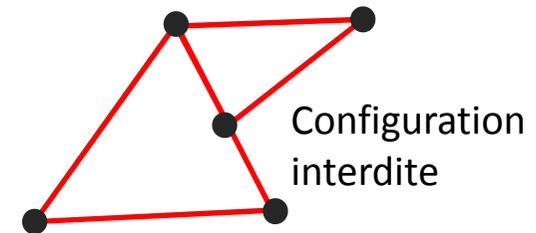


$$h = \max_{\text{elements}} d$$

1. Ω_h tend vers Ω quand $h \rightarrow 0$
2. $\Omega_h = \Omega$ si Ω à bord droit par morceau

Décomposition de Ω en des **éléments** triangulaire (sans recouvrement) partageant entre eux des **noeuds**

== > Construction de Ω_h



2 éléments peuvent seulement:

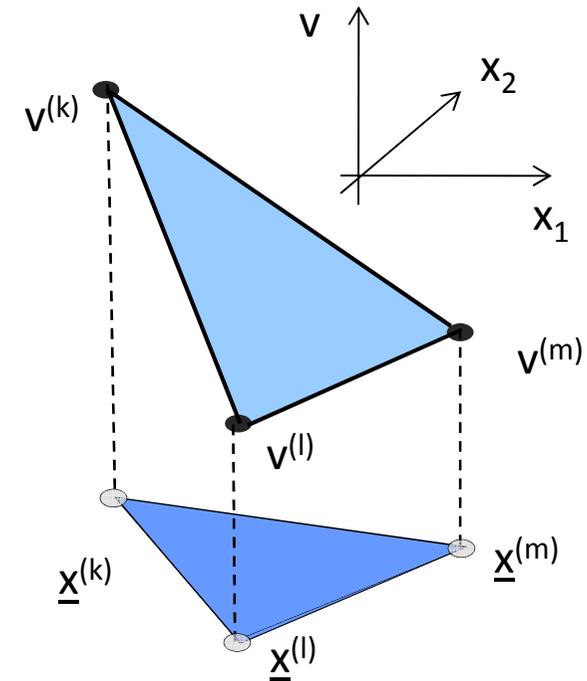
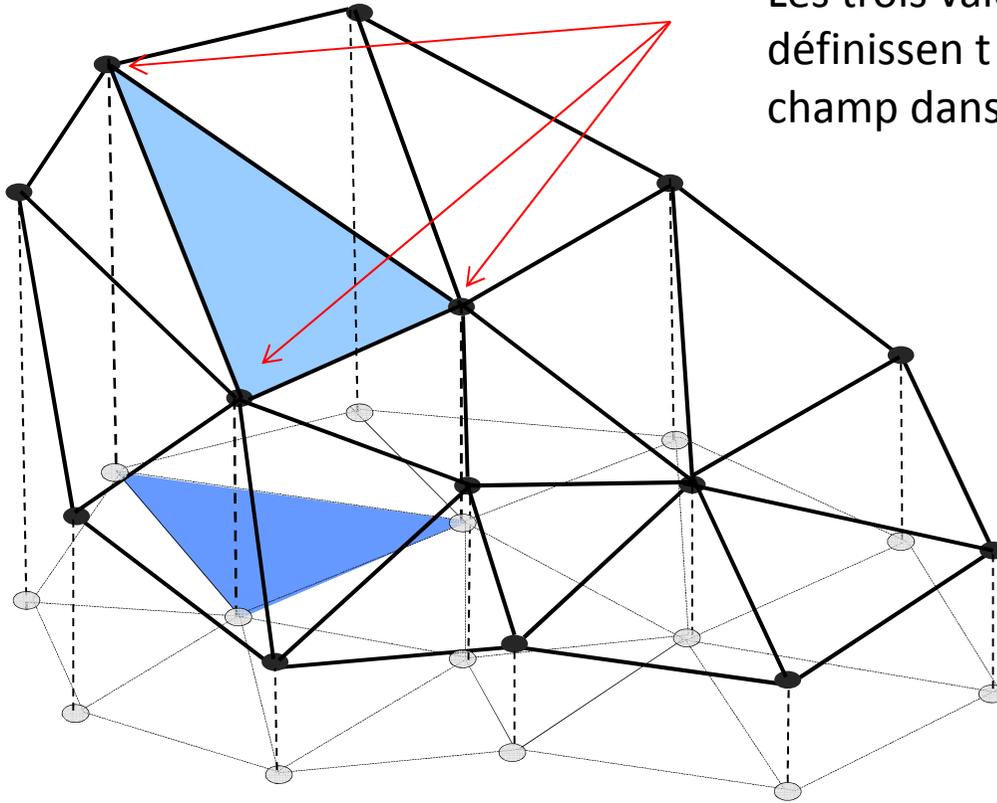
- intersection vide
- un sommet en commun
- une arête en commun

Le maillage est créé par des codes dédiés (par exemple gmsh).

Interpolation linéaire des déplacements

Regardons plus particulièrement un élément

Les trois valeurs nodales définissent complètement le champ dans l'élément



- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$v_h(\underline{x}) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \iff v_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)v^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)v^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)v^{(m)}$$

Ré-écriture d'un champ linéaire

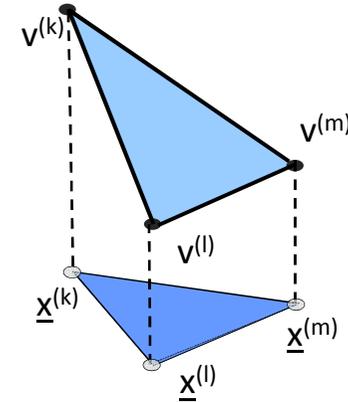
Interpolation linéaire des déplacements

- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)\underline{v}^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)\underline{v}^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)\underline{v}^{(m)}$$

N_k , N_l , et N_m sont appelées **fonctions de forme**, elles sont:

1. linéaire en (x_1, x_2)
2. satisfont la propriété «du Kronecker»: $N_k(\underline{x}^{(l)}) = \delta_{kl}$



Interpolation linéaire pour toutes les composantes du déplacement

Les fonctions de forme s'écrivent sous la forme:

$$N_p(x_1, x_2) = c_0^{(p)} + c_1^{(p)}x_1 + c_2^{(p)}x_2 \quad (p = k, \ell, m)$$

Les coefficients $c_0^{(p)}$, $c_1^{(p)}$ et $c_2^{(p)}$ dépendent uniquement des coordonnées $(x_1^{(p)}, x_2^{(p)})_{p=k,l,m}$ des noeuds de l'éléments

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}_h]$ associé à est **constant** sur l'élément T

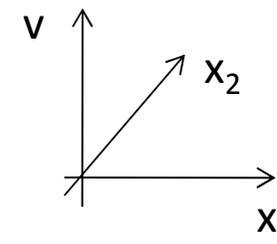
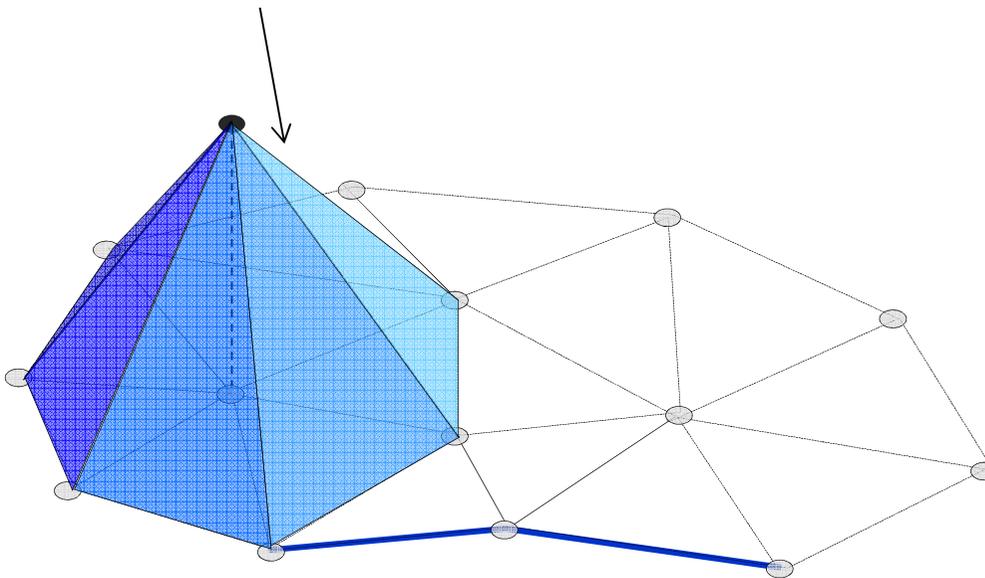
== > conséquence directe de l'interpolation linéaire

Le problème discrétisé

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}$$

Fonctions de forme globales sont les fonctions de bases de l'espace d'approximation

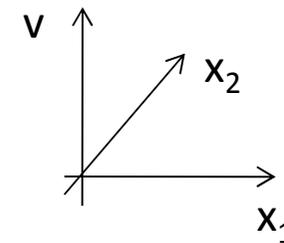
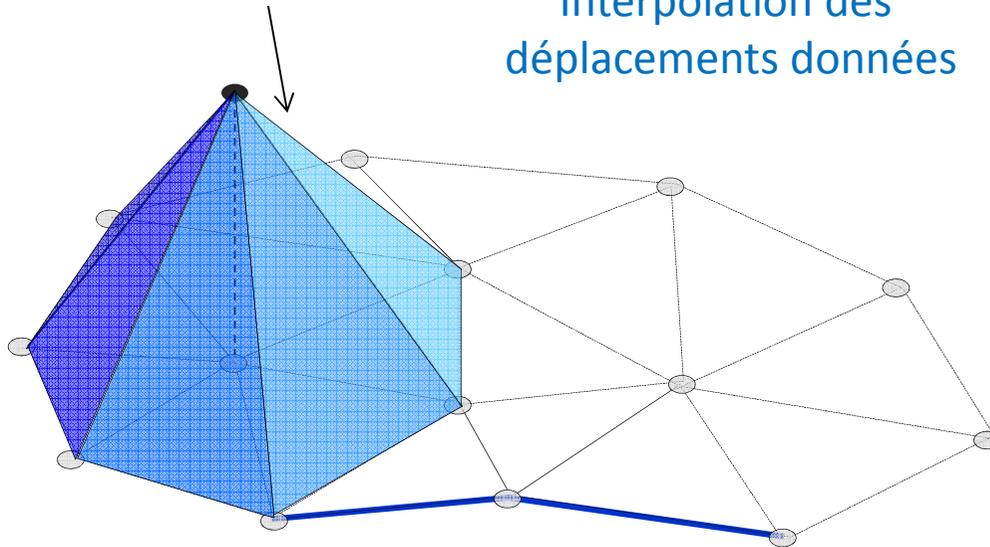


Le problème discrétisé

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} = \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \in S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{u}^D(\underline{x}^{(n)})}_{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D)} + \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \notin S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}}_{\alpha_K = v_j^{(n)}, \varphi^K(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \in \mathcal{C}_h(\underline{0})}$$

Fonctions de forme globales
Interpolation des déplacements données
Interpolation des déplacements inconnues



- Le domaine d'analyse est le domaine "discrétisé" Ω_h
- $\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D)$: **cinématiquement admissible** au sens de l'approximation ainsi définie (EF)

Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Le concept d'éléments finis isoparamétrique

L'approche précédente (linéaire, élément triangulaire)

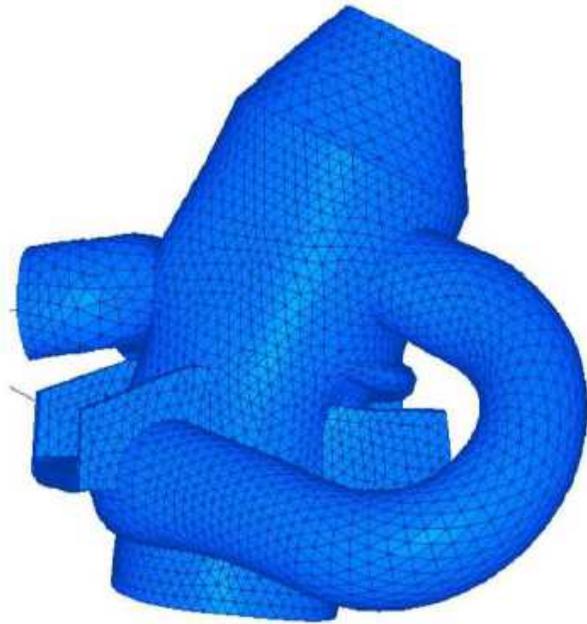
- est limité aux déformations planes
- conduit à des contraintes et déformation constante par morceau

On souhaite s'intéresser à une généralisation pour pouvoir traiter :

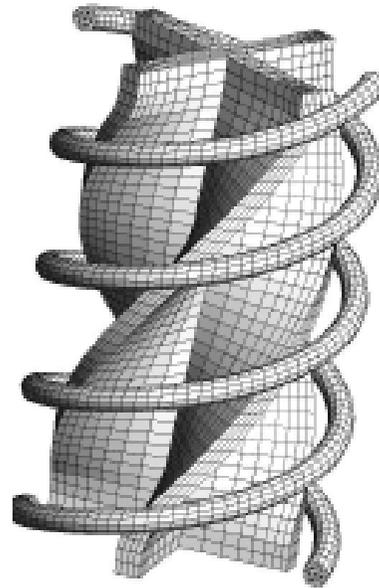
- problèmes 3D
- interpolation des déplacement plus "riche"
- meilleure représentation des frontières non planes

Une généralisation possible = ***les éléments isoparamétriques***

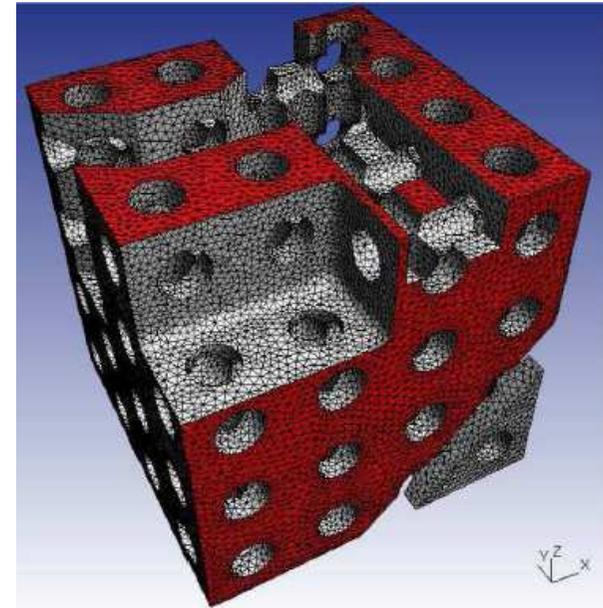
Les éléments isoparamétrique sont présents dans tous les codes EF commerciaux



© Electricité de France
(<http://www.code-aster.org/>)

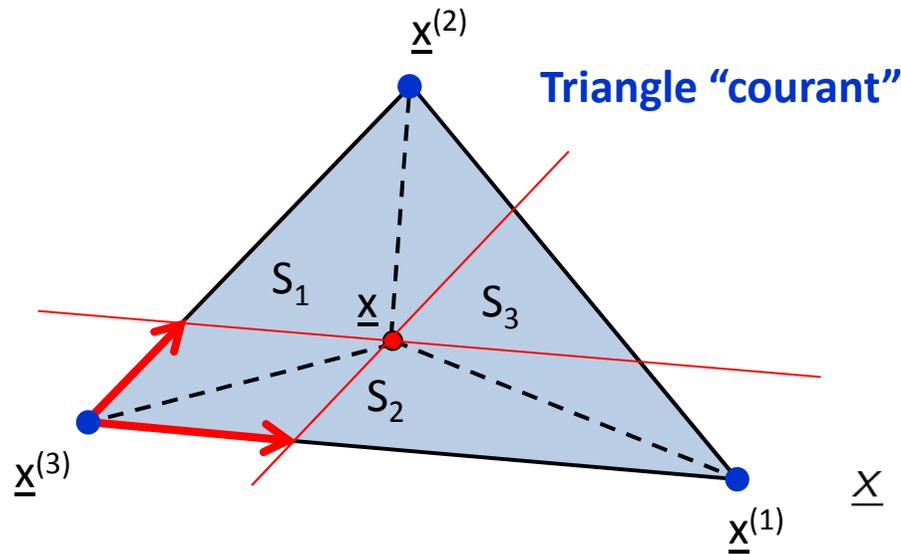


© <http://www.geuz.org/gmsh/>
(mailleur)



Exemple de ce que l'on peut faire avec gmsh nous utiliserons la version 2D en BE ...

Élément isoparamétrique: le triangle linéaire (revisité)



$$a_1 = \frac{S_1}{S} \quad a_2 = \frac{S_2}{S} \quad a_3 = \frac{S_3}{S}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Coordonnées d'aire

$$\underline{x} = \underline{x}^{(3)} + a_1(\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(3)}) + a_2(\underline{x}^{(2)} - \underline{x}^{(3)})$$



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

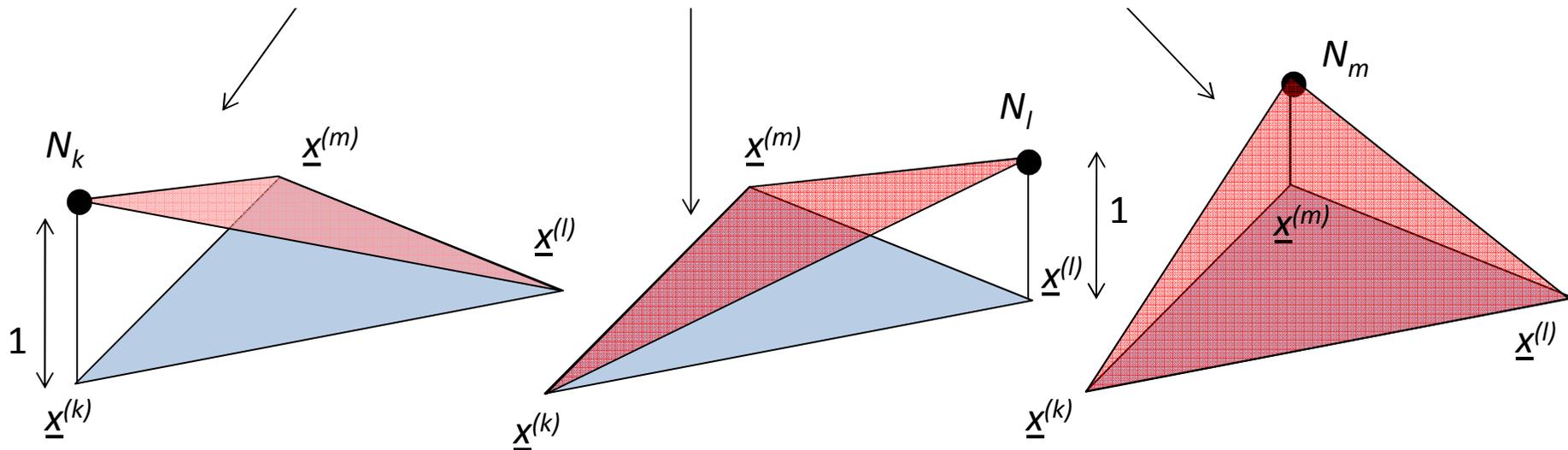
$$\underline{x} = a_1 \underline{x}^{(1)} + a_2 \underline{x}^{(2)} + a_3 \underline{x}^{(3)}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)} & x_2^{(23)} & x_1^{(32)} \\ x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)} & x_2^{(31)} & x_1^{(13)} \\ x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)} & x_2^{(12)} & x_1^{(21)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Les coordonnées d'aires coïncide avec les fonctions de forme linéaires vue en amph 1 ($a_i = N_i$)

Fontions de forme (locales)

$$v_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)v^{(k)} + N_l(x_1, x_2)v^{(l)} + N_m(x_1, x_2)v^{(m)}$$

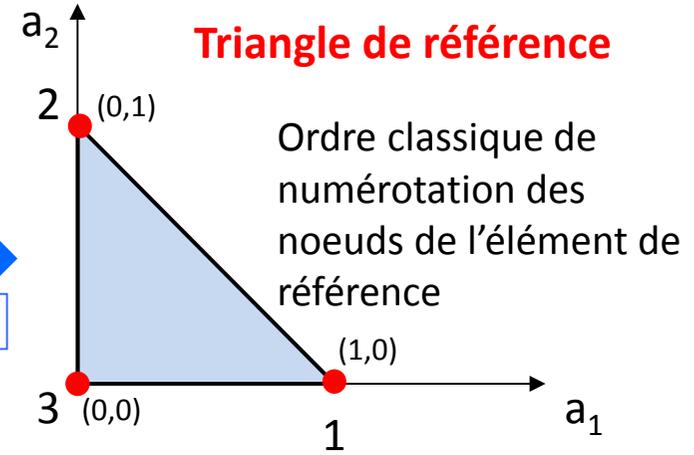
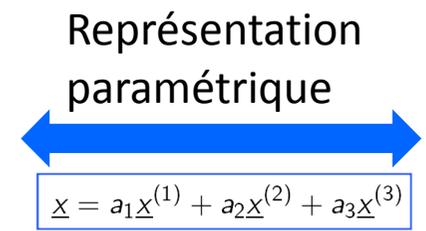
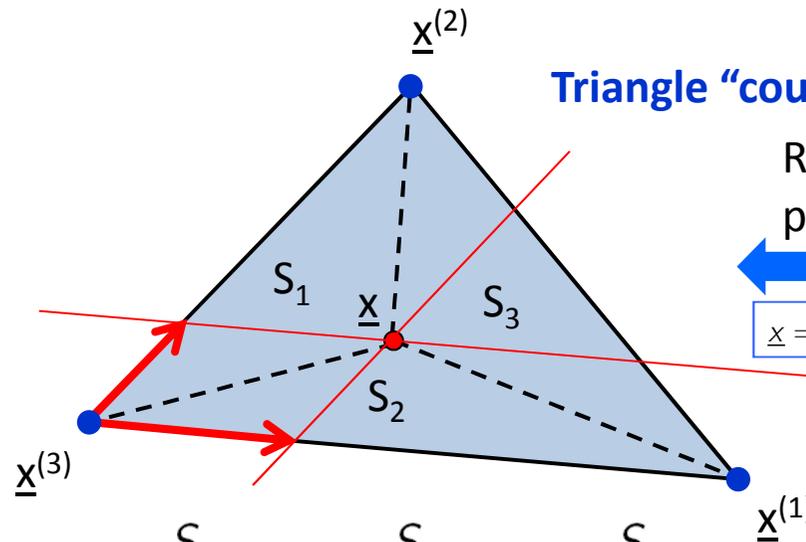


N_k , N_l , et N_m sont appelées **fonctions de forme** et sont:

1. linéaire en (x_1, x_2)
1. satisfont la propriété « du Kronecker »: $N_k(\underline{x}^{(l)}) = \delta_{kl}$

Parfois appelée fonctions de forme « locales » et « élémentaires » en opposition aux fonctions de forme « globales » (voir plus loin)

Élément isoparamétrique: le triangle linéaire (revisité)



$$a_1 = \frac{S_1}{S} \quad a_2 = \frac{S_2}{S} \quad a_3 = \frac{S_3}{S}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\underline{x} = a_1 \underline{x}^{(1)} + a_2 \underline{x}^{(2)} + a_3 \underline{x}^{(3)}$$

Représentation du **triangle de référence** sur le **triangle "courant"** en utilisant les coordonnées d'aire.

Existence d'une telle représentation pour tout triangle "courant" vers le même triangle de référence.

Les **noeuds (rouge)** de l'éléments de référence sont les images des **noeuds (bleu)** du triangle "courant" définis par l'utilisateur.

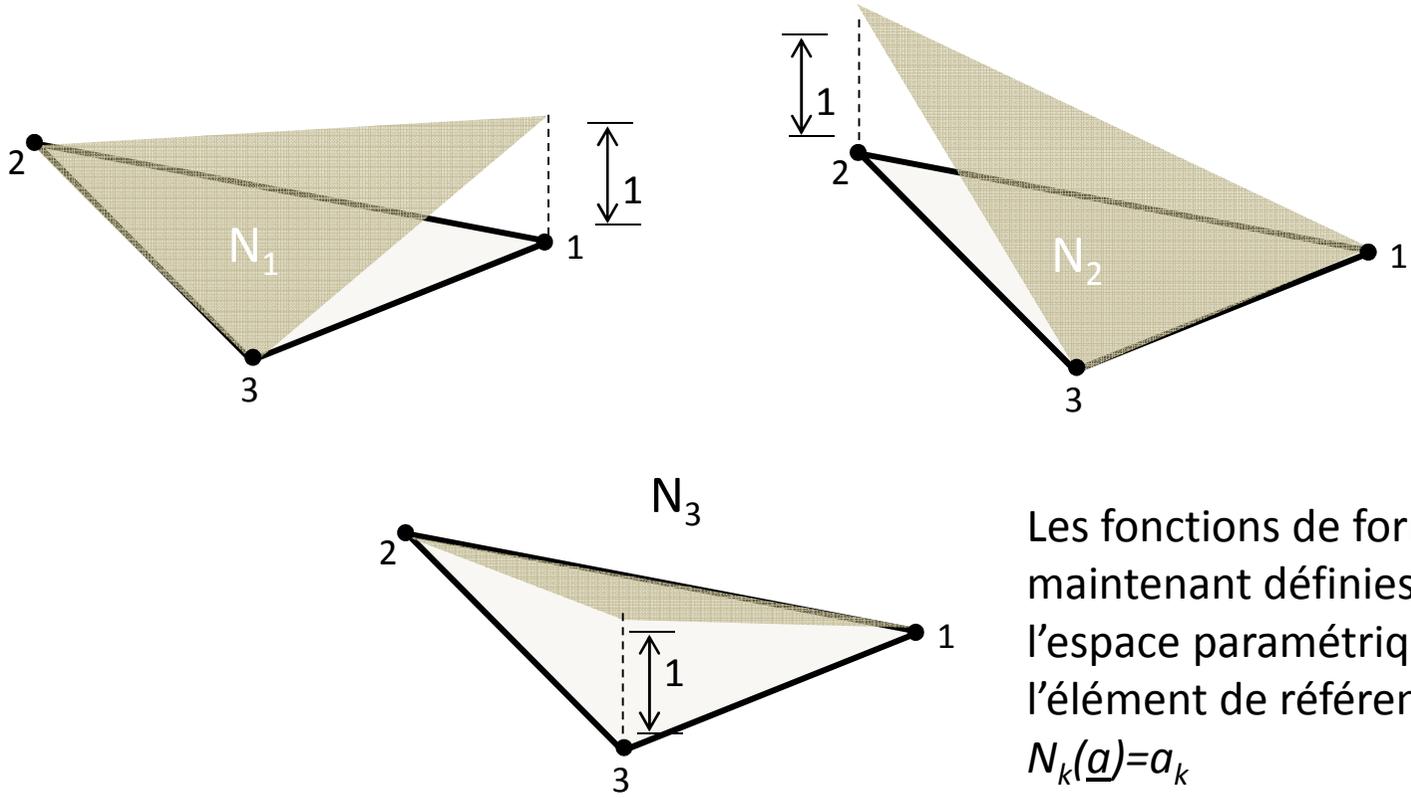
Représentation linéaire -> 3 paramètres -> 3 noeuds

Puisque les coordonnées d'aire coïncident avec les fonctions de forme:

$$\underline{v}_h = a_1 \underline{v}^{(1)} + a_2 \underline{v}^{(2)} + a_3 \underline{v}^{(3)}$$

ISO-paramétrique
(géométrie et déplacement)

De l'espace paramétrique vers l'espace "courant" (ou "physique")



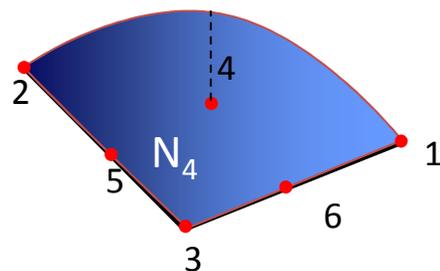
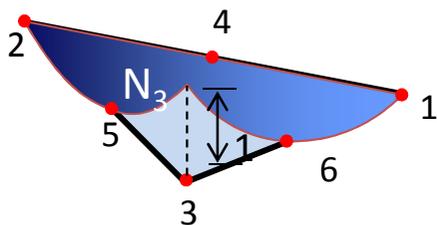
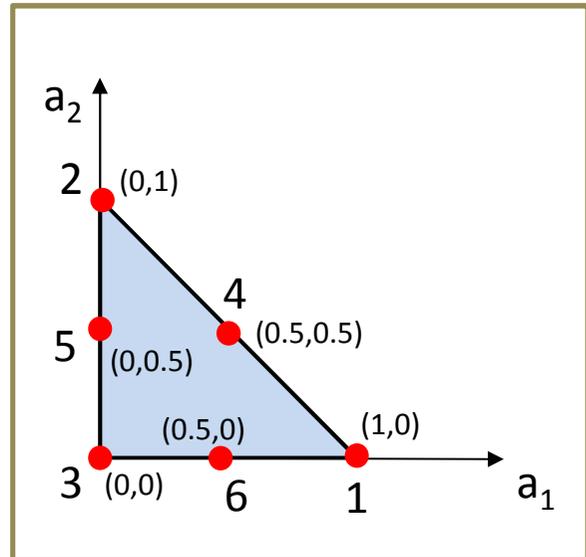
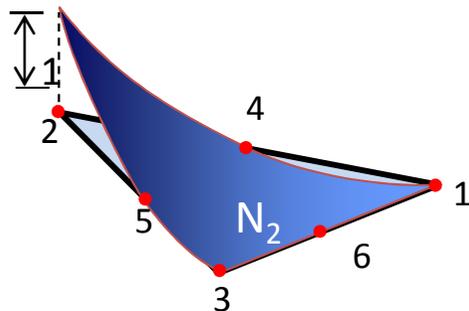
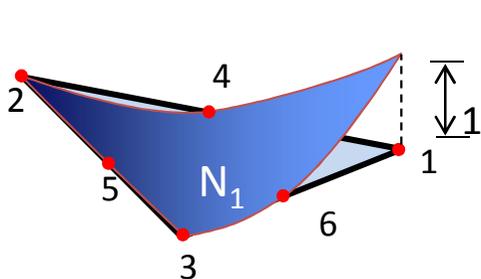
Les fonctions de forme sont maintenant définies dans l'espace paramétrique sur l'élément de référence:

$$N_k(\underline{a}) = a_k$$

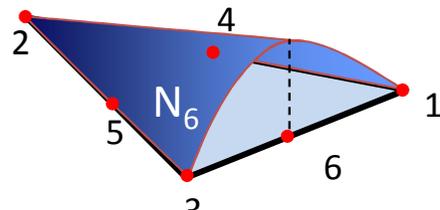
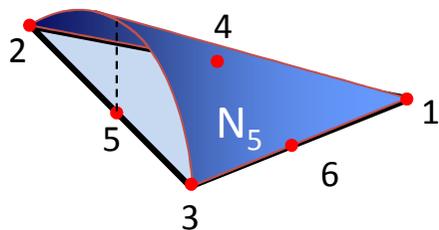
$$N_k(\underline{a}^{(l)}) = \delta_{kl}$$

Elément isoparamétrique: triangle quadratique

$$x_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} a_1 + c_i^{(2)} a_2 + c_i^{(3)} a_1^2 + c_i^{(4)} a_1 a_2 + c_i^{(5)} a_2^2$$



On commence par l'élément de référence.
On définit des fonctions de forme quadratiques satisfaisant la propriété:



$$N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}$$

Chaque fonction de forme est associée à un noeud et s'annule en tous les autres noeuds

$$N_1 = a_1(2a_1 - 1)$$

$$N_2 = a_2(2a_2 - 1)$$

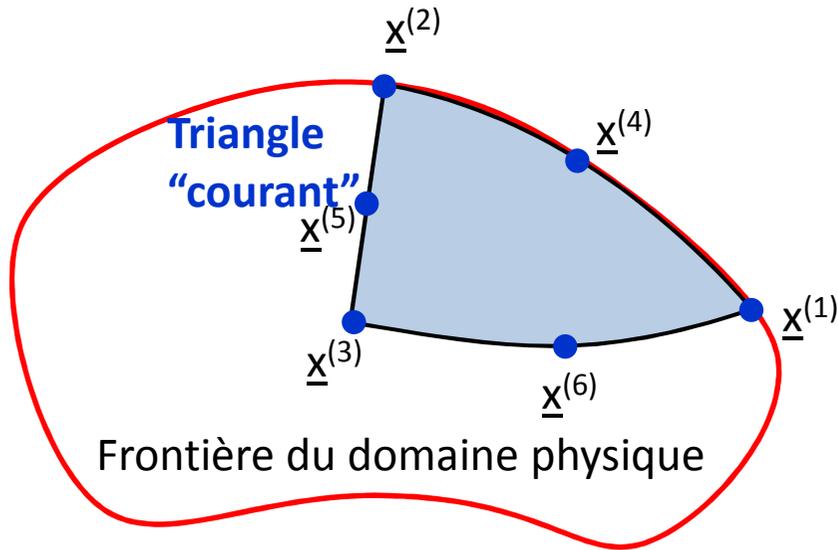
$$N_3 = a_3(2a_3 - 1)$$

$$N_4 = 4a_1 a_2$$

$$N_5 = 4a_2 a_3$$

$$N_6 = 4a_3 a_1$$

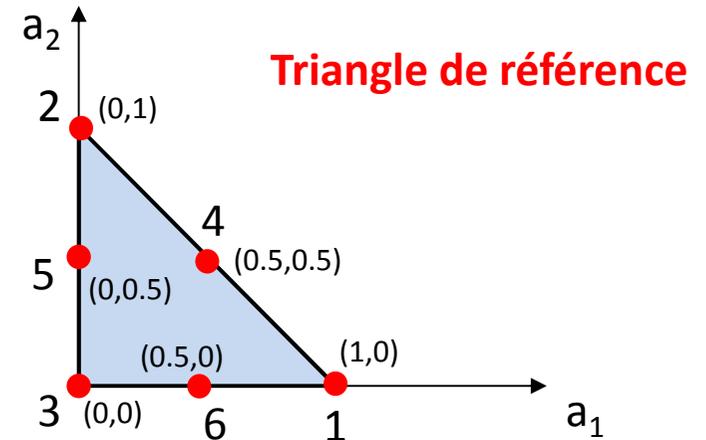
Élément isoparamétrique: triangle quadratique



Représentation paramétrique



$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)}$$



La représentation du **triangle de référence** sur le **triangle "courant"** en utilisant les coordonnées d'aire permet une meilleure approximation des **frontières courbes**

$$x_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} a_1 + c_i^{(2)} a_2 + c_i^{(3)} a_1^2 + c_i^{(4)} a_1 a_2 + c_i^{(5)} a_2^2$$

$$x_i = \sum_{k=1}^6 N_k(a_1, a_2) x_i^{(k)}$$

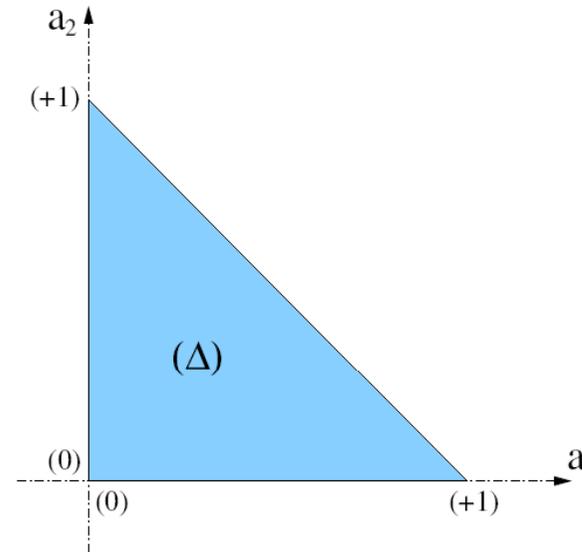
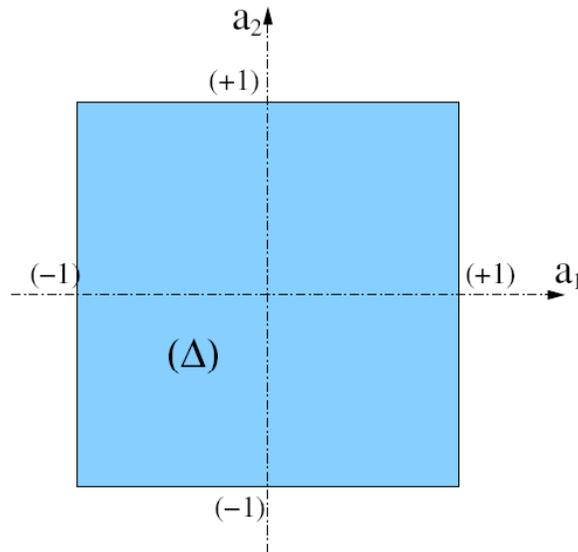
La discrétisation du domaine et le "vrai" domaine NE coïncide toutefois PAS de partout mais la position des noeuds est respectée exactement

Les même fonctions de forme sont alors utilisé pour générer l'espace d'approximation pour les **déplacements**

$$\underline{v}_h = \sum_{k=1}^6 N_k(a_1, a_2) \underline{v}^{(k)}$$

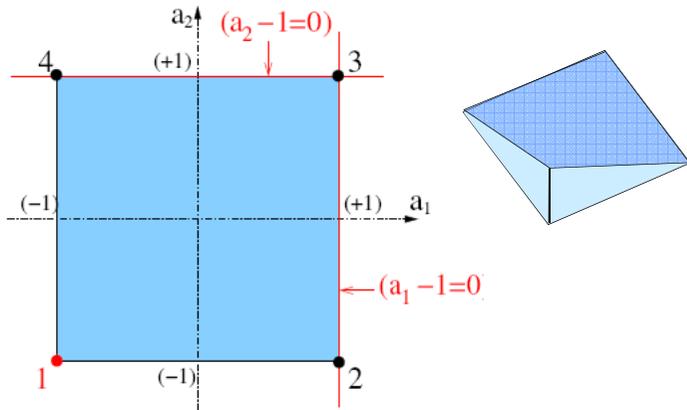
Quelques éléments de références classiques

- ▶ **unit square** ($D=2$): $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid -1 \leq a_1, a_2 \leq 1\}$;
- ▶ **unit triangle** ($D=2$): $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0\}$;

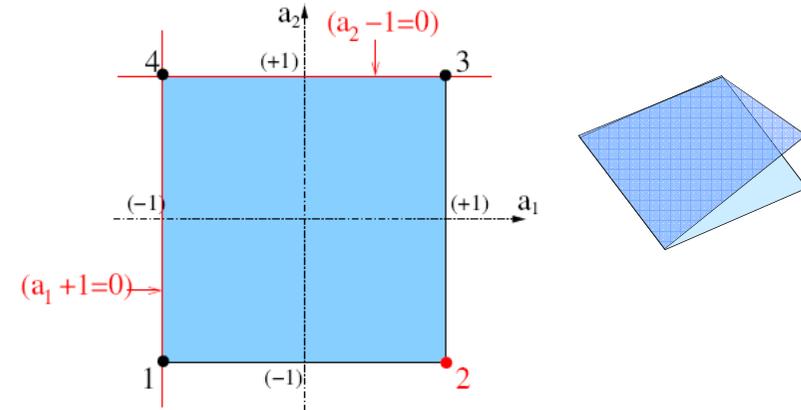


- ▶ **unit cube** ($D=3$): $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid -1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\}$;
- ▶ **unit tetrahedron** ($D=3$):
 $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2, a_3) \geq (0, 0, 0), 1 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0\}$.
- ▶ **unit prism** ($D=3$):
 $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0, -1 \leq a_3 \leq 1\}$.

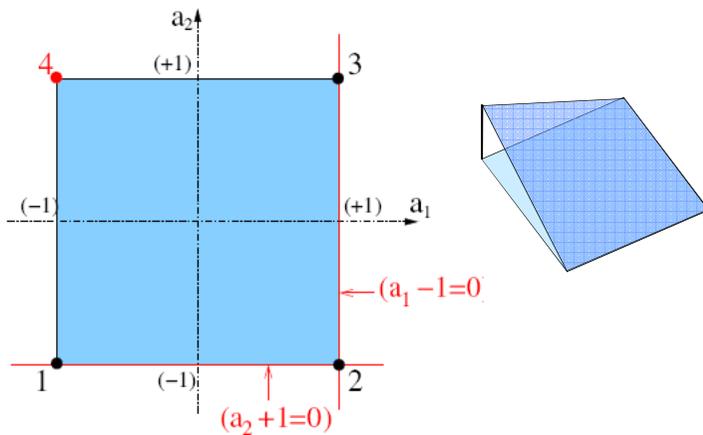
Exemple de fonctions de forme (bilinéaire, quadrilatère)



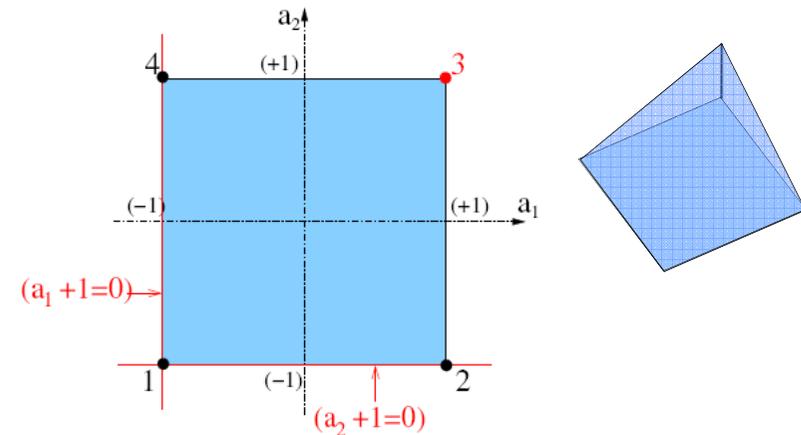
$$N_1(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 - a_2)/4$$



$$N_2(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 - a_2)/4$$



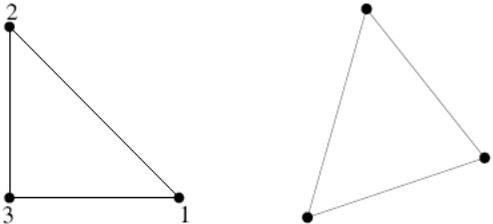
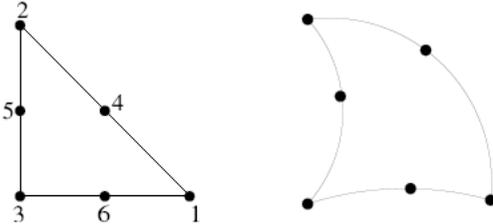
$$N_4(a_1, a_2) = (1 - a_1)(1 + a_2)/4$$



$$N_3(a_1, a_2) = (1 + a_1)(1 + a_2)/4$$

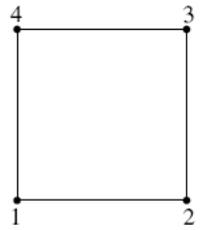
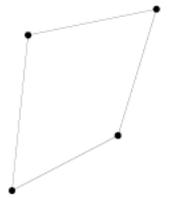
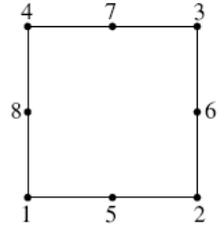
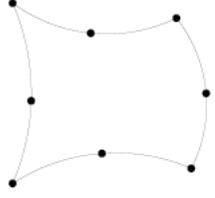
Exemples de fonctions de forme (i)

La liste n'est pas exhaustive ...

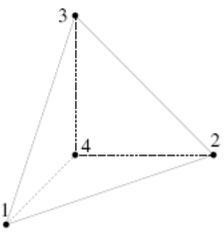
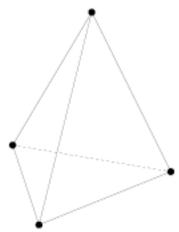
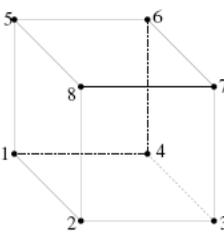
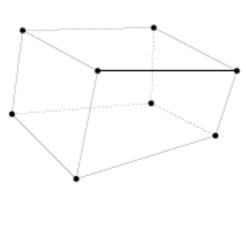
Type (master) (physical)	Order partial / total	Shape functions
	1 / 1	$N_1(a_1, a_2) = a_1$ $N_2(a_1, a_2) = a_2$ $N_3(a_1, a_2) = 1 - a_1 - a_2$
	2 / 2	$N_1(a_1, a_2) = a_1(2a_1 - 1)$ $N_2(a_1, a_2) = a_2(2a_2 - 1)$ $N_3(a_1, a_2) = (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = 4a_1a_2$ $N_5(a_1, a_2) = 4a_2(1 - a_1 - a_2)$ $N_6(a_1, a_2) = 4a_1(1 - a_1 - a_2)$

REMARQUE: si une fonction de forme s'annule en tous les noeuds d'une arête,
elle s'annule sur l'arête entière

Exemples de fonctions de forme (ii)

Type (master)	Type (physical)	Order part. / tot.	Shape functions
		1 / 2	$N_1(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)$ $N_3(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)$ $N_2(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)$
		2 / 3	$N_1(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)(-1 - a_1 - a_2)$ $N_2(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)(-1 + a_1 - a_2)$ $N_3(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)(-1 + a_1 + a_2)$ $N_4(a_1, a_2) = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)(-1 - a_1 + a_2)$ $N_5(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 - a_2)$ $N_6(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 + a_1)$ $N_7(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 + a_2)$ $N_8(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 - a_1)$

Exemples de fonctions de forme (iii)

Type (master) (physical)	Order part. / tot.	Shape functions
 	1 / 1	$N_1(a_1, a_2, a_3) = a_1$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = a_2$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = a_3$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = 1 - a_1 - a_2 - a_3$
 	1 / 3	$N_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 - a_3)$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 + a_2)(1 - a_3)$ $N_5(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 - a_2)(1 + a_3)$ $N_6(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 - a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$ $N_7(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)$ $N_8(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(1 + a_1)(1 - a_2)(1 + a_3)$

Eléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Eléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

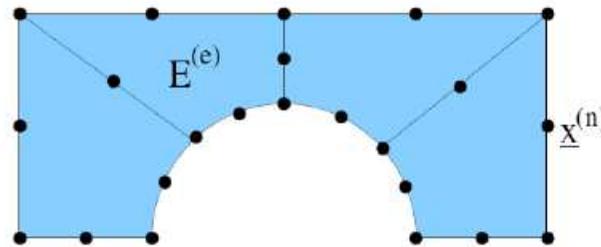
Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Maillage

Cas général: $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ (D=3; D=2 en déformation plane ou contrainte plane)



- + Ω est partitionné en N_E **éléments** $E^{(e)}$ ($1 \leq e \leq N_E$) qui peuvent être mis en relation avec un élément de référence de forme géométrique simple
 - triangle ou carré
 - cubes, tétraèdre, pentaèdre (3D)
- + $E^{(e)}$ est le support géométrique d'un **élément fini**
- + Choix des **noeuds** N_N points $(x(n) \mid 1 \leq n \leq N_N)$ de Ω

Le choix des noeuds et leur emplacement *n'est pas arbitraire* mais doit reproduire l'un des éléments standart disponibles (i.e. chaque sommet est un noeud,)

Typiquement, les noeuds frontière sont choisis tout d'abord de sorte que les frontières discrétisées coïncide avec les "vrais" frontières aux noeuds en question (et seulement là en règle générale). Ensuite, les noeuds dans le domaine sont choisis de sorte à générer une partition uniforme (éléments non dégénérés)

Maillage: structure de donnée (code matlab)

- Table de coordonnées des noeuds (N_N lignes, D colonnes)

$$\mathit{nodes}(n).\mathit{coor}(j) = x_j^{(n)} : j^{\text{ème}} \text{ coordonnée du nœud « n » (numérotation globale)}$$

- Table de connectivité des éléments (N_E lignes, n_e colonnes)

$$\mathit{elements}(e).\mathit{nodes}(1:n_e) = \text{liste des noeuds de l'élément "e"} \\ (n_e: \text{nb de noeuds de l'élément})$$

== > cette table nous donne la correspondance entre **numérotation locale** et **numérotation globale** des noeuds d'un éléments

$$\mathit{elements}(e).\mathit{nodes}(k) = \text{numéro global du nœud } k \text{ (numérotation locale)}$$

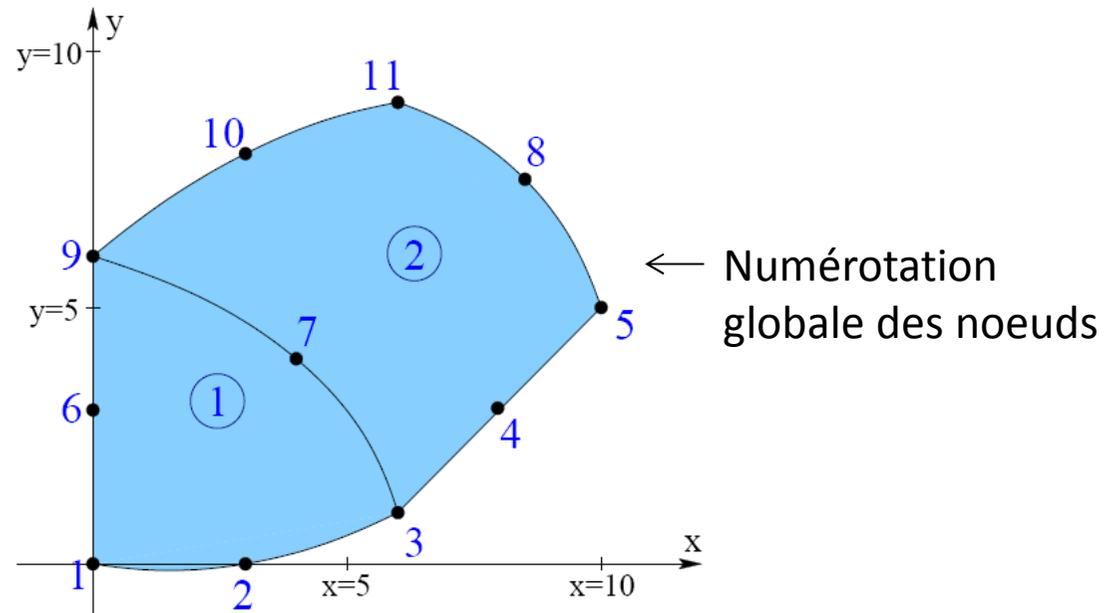
nodes.coor
nodes.dof
nodes.displ

elements.type
elements.mat
elements.nodes

Exemple

nodes.coor

(node 1)	0	0
(node 2)	3	0
(node 3)	6	1
(node 4)	8	3
(node 5)	10	5
(node 6)	0	3
(node 7)	4	4
(node 8)	8,5	7,5
(node 9)	0	6
(node 10)	3	8
(node 11)	6	9

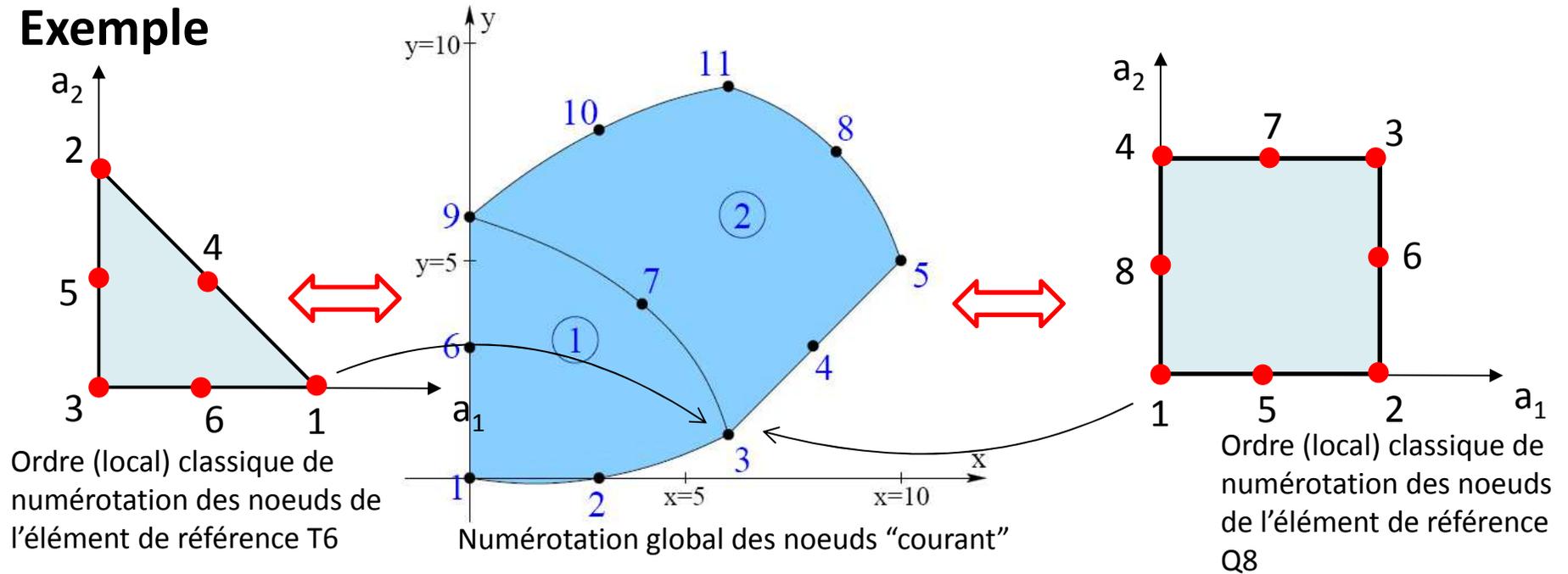


elements.nodes

n_e	nodes								
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

Question: comment fixer l'ordre des noeuds dans la table de connectivité ?

Exemple



Pour chaque élément, on choisit le noeud "courant" (global) qui correspondra au premier noeud (choix non unique) dans la numérotation locale. La suite de la connectivité suit est dictée par ce choix.

n_e	nodes								
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

elements.nodes

Distinction important entre la numérotation **locale** et la numérotation **globale** des noeuds e.g. le 4^{ème} noeud (local) de l'élément 1 est le 7^{ème} noeud (global)

Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

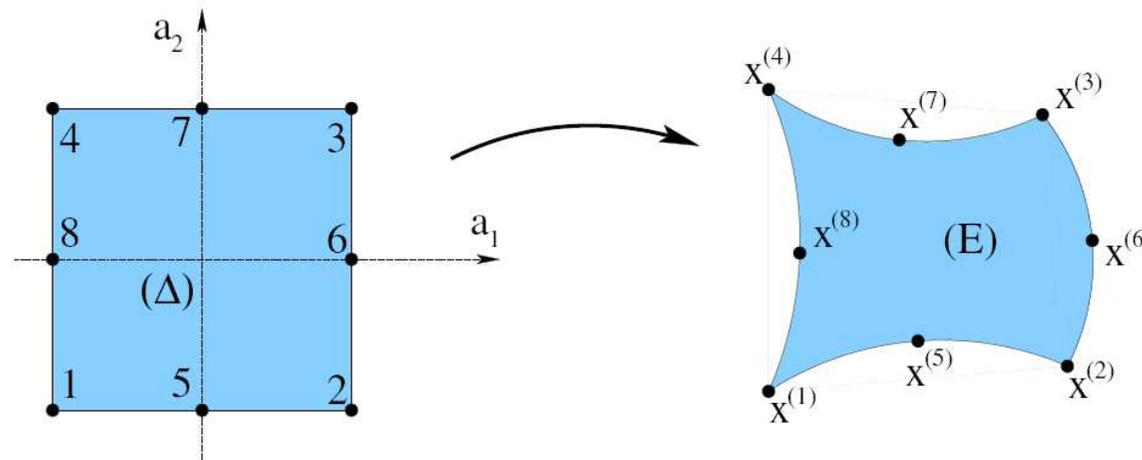
Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Représentation approchée de la géométrie



- Master element in the parameter space Δ :

$$E \ni \underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{a} \in \Delta)$$

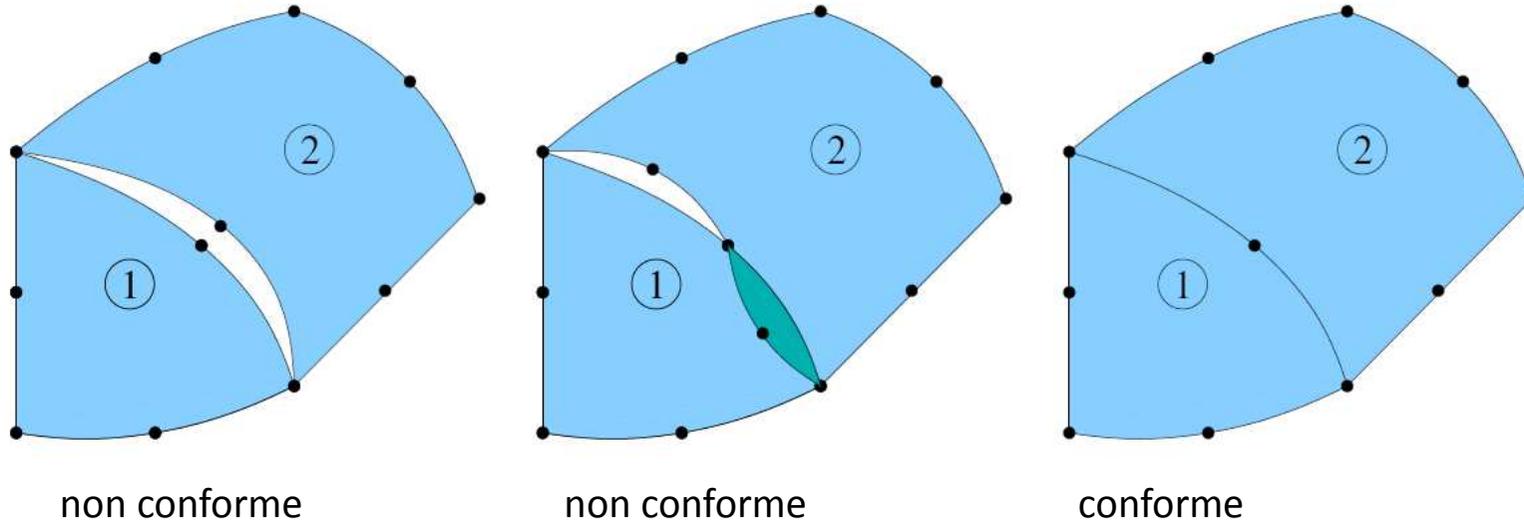
$N_k(\underline{a})$: **polynomial shape functions.**

- If the representation has to be **exact** at every node:

$$\underline{x}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}^{(\ell)}) \underline{x}^{(k)} \implies \boxed{N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}} \quad (1 \leq k, \ell \leq n_e)$$

Maillage conforme

Deux éléments voisins ne doivent pas se recouvrir ni créer de trous aux interfaces.



Si des éléments isoparamétriques sont utilisés, ceci est garanti si deux éléments sont:

- **disjoints**
ou ont en commun
- **un noeud**
- **une arête**, et dans ce cas, s'ils ont le **même nombre** de noeuds (aux **même positions**) sur l'arête commune

C'est l'intérêt fondamental des éléments isoparamétriques

Maillage conforme: exemple

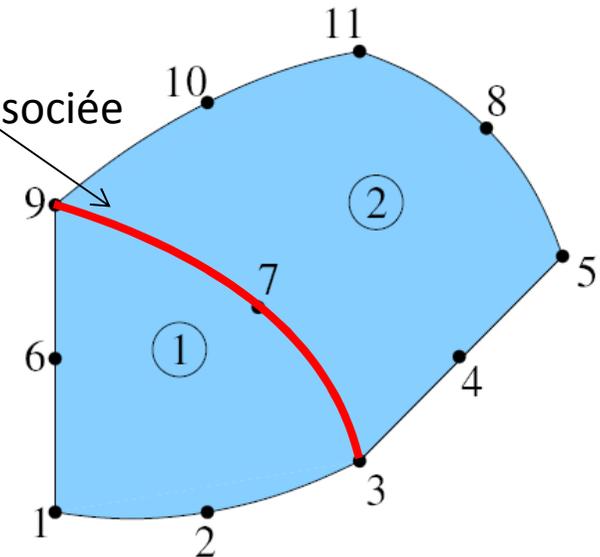
Soit I l'interface commune (de noeuds 3,7,9)

Par construction, dans l'élément **1** la fonction de forme associée aux noeuds 1,2 et 6 s'annule sur I ;
dans l'élément **2** la fonction de forme associée aux noeuds 4,5,8,11 et 10 s'annule sur I ;

Elt Isoparamétrique : $\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(a_1, a_2) \underline{x}^{(k)}$

Ainsi les deux représentations géométrique de I coïncide si la **trace** sur I des fonctions de forme associées aux noeuds 3,7, et 9 sur les deux éléments coïncide

Ceci est **toujours vérifié** par les éléments isoparamétrique de la famille décrite



Régularité d'un maillage conforme

$$E \ni \underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{a} \in \Delta)$$

doit être une application bijective de l'élément de référence Δ sur l'élément "courant" E

Matrice Jacobien :

$$[J(\underline{a})] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right]_{1 \leq i, j \leq D} \quad \text{with} \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) x_i^{(k)}$$

Condition: le déterminant J de $[J]$ doit être continu et ne jamais s'annuler sur Δ

- Pour un élément donnée, la condition J non nul impose des restrictions sur la position et le nombre de noeuds

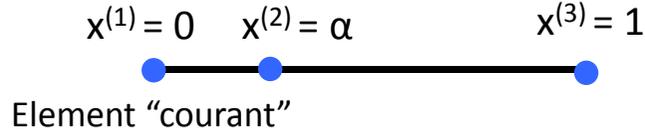
- Le cas $J = 0$ apparait ... c'est le signal d'un problème (déformation trop grande, inter-pénétrations, etc)

A vérifier pendant l'opération de maillage!!!

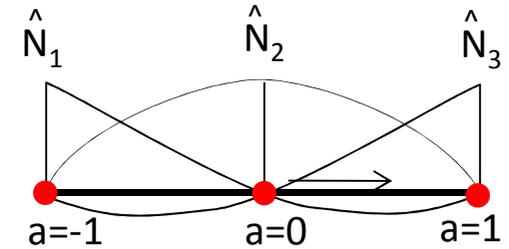
Enfin, l'élément différentiel de volume s'écrit :

$$dV(\underline{x}) = J(\underline{a}) dV(\underline{a}) \quad J \text{ est une fonction polynomiale de } \underline{a}$$

Exemple: Élément ligne à 3-noeuds (B3)



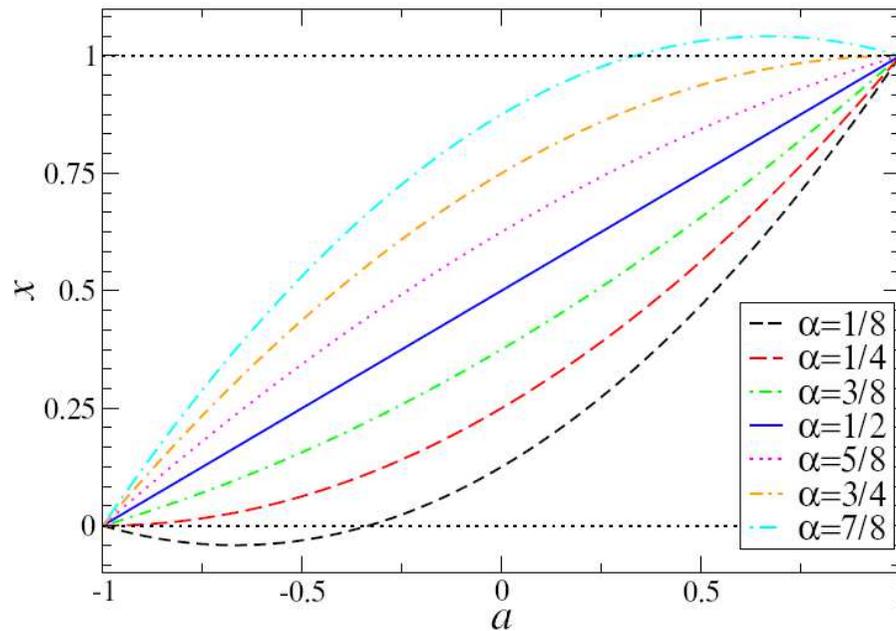
Représentation paramétrique



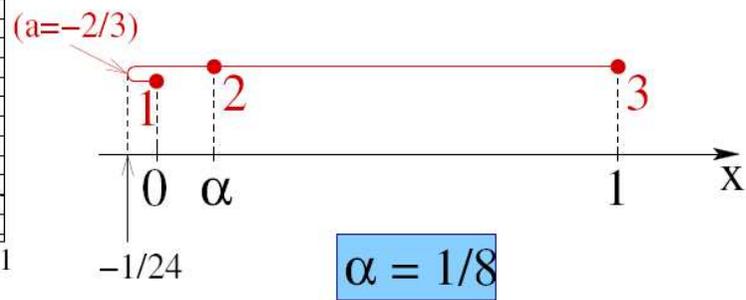
$$x = \hat{N}_1(a) \times 0 + \hat{N}_2(a) \times \alpha + \hat{N}_3(a) \times 1 \quad (a \in \Delta = [-1, 1])$$

$$\hat{N}_1(a) = a(a - 1)/2, \quad \hat{N}_2(a) = 1 - a^2, \quad \hat{N}_3(a) = a(a + 1)/2$$

($\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3$: lagrangian polynomials with $a = -1, 0, 1$)



jacobien $J(a) = (1 - 2\alpha)a + 1/2$
garde un signe constant si $1/4 < \alpha < 3/4$



Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Représentation locale du déplacement

Interpolation isoparamétrique: les déplacements sont représentés en utilisant les mêmes fonctions de forme que celles de la géométrie

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \\ \underline{x} &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \end{aligned} \right\} (\underline{a} \in \Delta)$$

Notation "pratique" pour la programmation:

$$\begin{aligned} \{v_h(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})] \{V_e\} \\ \{x\} &= [N(\underline{a})] \{X_e\} \end{aligned}$$

$$\{v_h\} = \{v_1, v_2, \dots, v_D\}^T$$

$$\{V_e\} = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_D^{(1)}, \dots, v_D^{(n_e)}\}^T$$

Liste (colonne) : { }
Matrice : []

$$[N(\underline{a})] = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & \dots & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & \dots & 0 & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) \end{bmatrix}}_{D(=3) \times n_e \text{ columns}} \quad (D(=3) \text{ lines})$$

D = dimension du problème
D=3 pour l'élasticité 3D
D=2 pour l'élasticité 2D

Convergence: condition nécessaire

Lorsque que l'on raffine le maillage ($h \rightarrow 0$) la déformation devient approximativement constante sur chaque élément ...

- ❑ **Condition nécessaire de convergence: le déplacement interpolé doit être capable de représenter exactement tous les champs de déplacement linéaire:**
 - mouvements de corps rigide ($\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$)
 - déplacements associés à des déformations constantes

Champ de déplacement linéaire $\underline{v}(\underline{x})$:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{b}$$

Valeurs nodales d'un tel champ sur un élément:

$$\underline{v}^{(k)} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \quad (1)$$

Question: si on impose que les déplacements nodaux sont données par (1) ...

L'interpolation introduite permettra-t-elle de reproduire de manière exact le champ linéaire?

Convergence: condition nécessaire

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \quad \leftarrow \text{Éléments isoparamétrique}$$

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underbrace{\{ \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \}}_{\underline{v}^{(k)}} = \underline{A} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \right\} \underline{b} \\ &= \underline{A} \cdot \underline{x} + \left\{ \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \right\} \underline{b} \end{aligned}$$

Pour garantir que si, $\underline{v}^{(k)} = \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \implies \underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}$
 Il est nécessaire et suffisant que:

Partition de l'unité

$$\sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) = 1 \quad \text{for all } \underline{a} \in \Delta$$

Cette condition est satisfaite par toutes les fonctions de forme proposées:

En particulier: $\underline{\varepsilon} \left[[N(\underline{a})] \{ \nabla_e^{\text{rigid}} \} \right] = \underline{0}$

Résumé

Si les valeurs nodales des déplacement sont compatible avec celles d'un champ linéaire, l'interpolation représentera correctement le champ linéaire sur tout l'élément

Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

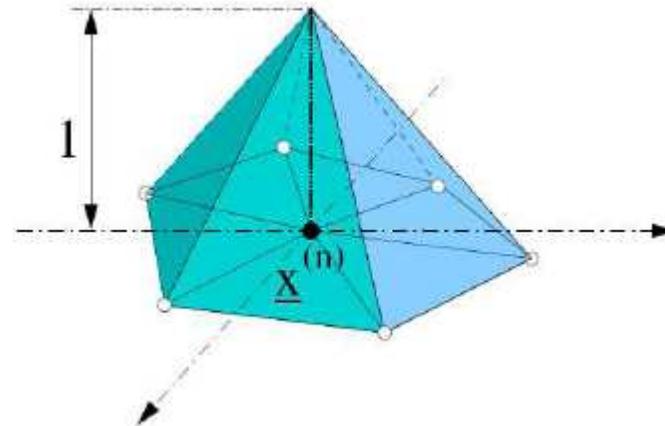
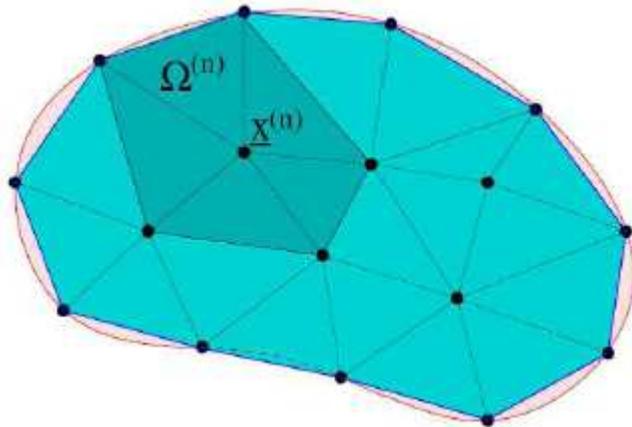
Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Representation globale des déplacements

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \quad (\underline{x} \in \Omega_h)$$



- Le support de $\tilde{N}_n(\underline{x})$ est $\Omega^{(n)}$
- Si $E^{(e)} \subset \Omega^{(n)}$, alors $\tilde{N}_n(\underline{x}) = N_k(\underline{a})$ avec $n = \text{elements}(e) \cdot \text{nodes}(k)$ and $\underline{x} = \underline{x}(\underline{a})$
- Propriété de partition de l'unité: $\sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) = 1 \quad (\underline{x} \in \Omega_h)$

Les déplacements imposés (CL)

$$\begin{aligned}
 l = \text{nodes}(n).\text{dof}(j) > 0 & \quad (v_j^{(n)} \text{ inconnue}) \\
 l = \text{nodes}(n).\text{dof}(j) < 0 & \quad (v_j^{(n)} \text{ imposée})
 \end{aligned}$$

La table des inconnues : **nodes.dof** , associe un numéro à chaque composante nodale du déplacement

nodes(n).dof(j) = numéro du “degré de liberté” de la composante “j” du champ de déplacement au noeud “n”

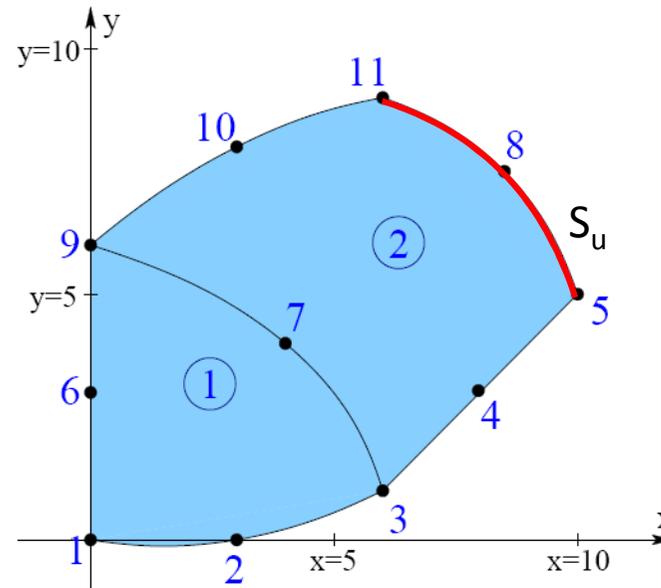
$$\begin{aligned}
 \underline{v}_h(\underline{x}) &= \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \\
 &= \underbrace{\sum_{(n,j) \mid \text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j}_{\substack{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D) \\ \text{Interpolation des} \\ \text{déplacements données}}} + \underbrace{\sum_{(n,j) \mid \text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) v_j^{(n)} \underline{e}_j}_{\substack{\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{0}) \\ \text{Interpolation des} \\ \text{déplacements inconnues}}} \\
 &= \underline{u}_h^{(D)} + \underline{v}_h^{(0)} \quad (\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D), \underline{v}_h^{(0)} \in \mathcal{C}_h(\underline{0}))
 \end{aligned}$$

Version spécifique de la méthode de Galerkin avec:

$$\underline{\varphi}^I(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j \quad \text{et} \quad \alpha_l = v_j^{(n)} \quad \text{avec} \quad l = \text{nodes}(n).\text{dof}(j)$$

Exemple

nodes.coor	
(node 1)	0 0
(node 2)	3 0
(node 3)	6 1
(node 4)	8 3
(node 5)	10 5
(node 6)	0 3
(node 7)	4 4
(node 8)	8,5 7,5
(node 9)	0 6
(node 10)	3 8
(node 11)	6 9



elements.nodes	
n_e	nodes
(element 1)	6 3 9 1 7 6 2 × ×
(element 2)	8 3 5 11 9 4 8 10 7

dof ^T =	1	3	5	7	<0	9	11	<0	13	15	<0	(j = 1)
	2	4	6	8	<0	10	12	<0	14	16	<0	(j = 2)

Éléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Éléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrices élémentaires

Gradient du champ de déplacement

Pour la programmation de la méthode de Galerkin, il nous faut savoir calculer le gradient du champ de déplacement:

On a (élément isoparamétrique)

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad \{\underline{x}\} = [N(\underline{a})] \{X_e\}$$

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \quad \{\underline{v}_h(\underline{x})\} = [N(\underline{a})] \{V_e\}$$

+ **Gradient de \underline{v}_h** : $d\underline{v}_h = \nabla \underline{v}_h \cdot d\underline{x} \implies \{d\underline{v}_h\} = [\nabla \underline{v}_h] \{d\underline{x}\}$

Coodonnées paramétriques: $\{d\underline{x}\} = [J(\underline{a})] \{d\underline{a}\} \quad \{\underline{v}_h(\underline{x})\} = [N(\underline{a})] \{V_e\}$

$$\{d\underline{v}_h\} = [H(\underline{a})] \{d\underline{a}\} = [H(\underline{a})][J(\underline{a})]^{-1} \{d\underline{x}\} \quad [H(\underline{a})] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) v_i^{(k)} \right]$$

On a finalement

$$[\nabla \underline{v}_h] = [H(\underline{a})][J(\underline{a})]^{-1}$$

$$2[\varepsilon[\underline{v}_h]] = [H(\underline{a})][J(\underline{a})]^{-1} + [J(\underline{a})]^{-T} [H(\underline{a})]^T$$

Tenseur des déformations – Tenseur des contraintes

$$2[\varepsilon[\underline{v}_h]] = [H(\underline{a})][J(\underline{a})]^{-1} + [J(\underline{a})]^{-T} [H(\underline{a})]^T \quad [H(\underline{a})] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) v_i^{(k)} \right]$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T$$

- ❑ Tenseur des déformations

$$\{\varepsilon[\underline{v}_h]\} = [B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Loi de comportement

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$$

Cas isotrope (3D)

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

- ❑ Tenseur des contraintes

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} = [A][B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Densité d'énergie de déformation

$$\sigma : \varepsilon = \varepsilon : A : \varepsilon = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \{V_e\}^T [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] \{V_e\}$$

Eléments finis isoparamétrique

1. Petit retour sur le chapitre précédent

2. Eléments finis isoparamétrique

Maillage

Représentation approchée de la géométrie

Représentation locale des déplacements

Représentation globale des déplacements

Tenseur des déformations, Tenseur des contraintes

Matrice et second membre élémentaires

Matrice de rigidité élémentaire

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV$$

$$\begin{aligned} \{u(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})]\{U_e\} & \{\varepsilon[u_h](\underline{x})\} &= [B_e(\underline{a})]\{U_e\} \\ \{w(\underline{x})\} &= [N_e(\underline{a})]\{W_e\} & \{\varepsilon[w](\underline{x})\} &= [B_e(\underline{a})]\{W_e\} \end{aligned}$$

- ❑ Transport sur l'élément de référence $\underline{x} \in E_e \rightarrow \underline{a} \in \Delta_e, \quad dV = J(\underline{a}) dV(\underline{a})$
- ❑ Densité d'énergie de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] = \{\varepsilon[w]\}^T [A] \{\varepsilon[u_h]\} = \{W_e\}^T [B(\underline{a})]^T [A] [B(\underline{a})] \{U_e\}$$

- ❑ Matrice de rigidité élémentaire

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV = \{W_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\} \{U_e\}$$

$$\begin{aligned} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[u_h] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[w] dV &= \{W_e\}^T [K_e] \{U_e\} \\ [K_e] &= \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \end{aligned}$$

Pour l'instant, on ne distingue pas (pour déplacement) les valeurs données de celles inconnues

Second membre élémentaire (force de volume)

$$\begin{aligned}\{u(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})]\{U_e\} \\ \{w(\underline{x})\} &= [N_e(\underline{a})]\{W_e\}\end{aligned}$$

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\Gamma_e^T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{vol}} + F_e^{\text{surf}}\} = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{ext}}\}$$

□ Cas des forces de volume

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV = \{W_e\}^T \left\{ \int_{\Delta_e} [N(\underline{a})]^T \{f(\underline{x}(\underline{a}))\} J_e(\underline{a}) \, dV(\underline{a}) \right\} = \{W_e\}^T \{F_e^{\text{vol}}\}$$

- transport des intégrales sur l'élément de référence (espace paramétrique)
- Calcul des intégrales ?
- Evaluation analytique reste souvent pas possible

that's all folks