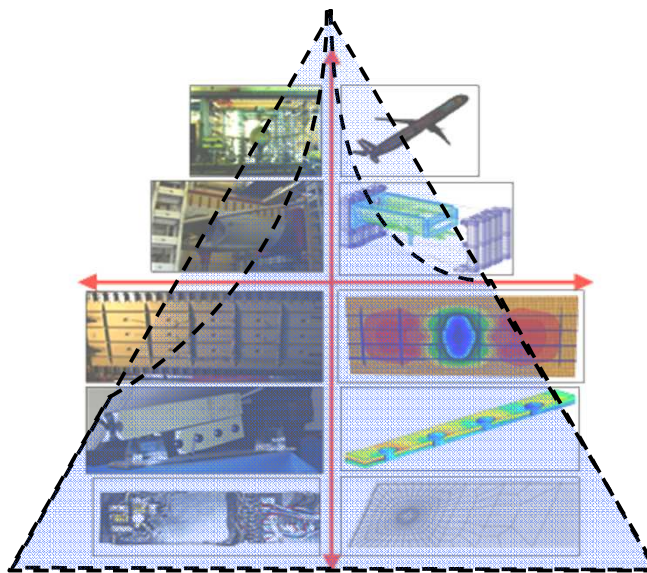


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Christian Rey

christian.rey@safran.fr



Equipe :

Cours

Christian Rey: Safran Tech

christian.rey@safran.fr

TD/Séances matlab

Clément Olivier: Safran Tech

clement.olivier@safran.fr

Livre :

Auteurs : Marc Bonnet, Attilio Frangi, Christian Rey

Titre : The finite element method in solid mechanics

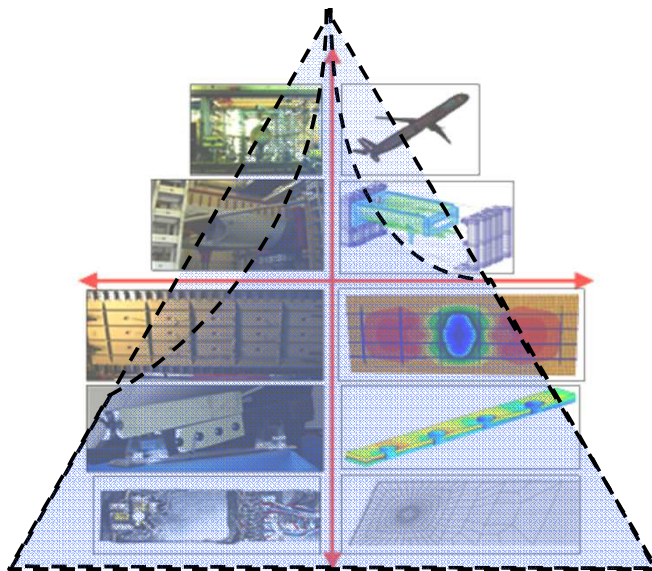
Editeur : Mc Graw Hill Education

http://www.catalogo.mcgraw-hill.it/catlibro.asp?item_id=3010

Année : 2014

La Méthode des Eléments Finis :

- Outils maintenant indispensable dans le monde de l'ingénierie et de la conception (solide & fluide)
- Remplacer /enrichir **les campagnes expérimentales (couteuse)** pour mieux comprendre la physique sous jacente (après calibration des modèles)
- **Optimisation** des process et/ou produits existants
- **Conception** de nouveau produits

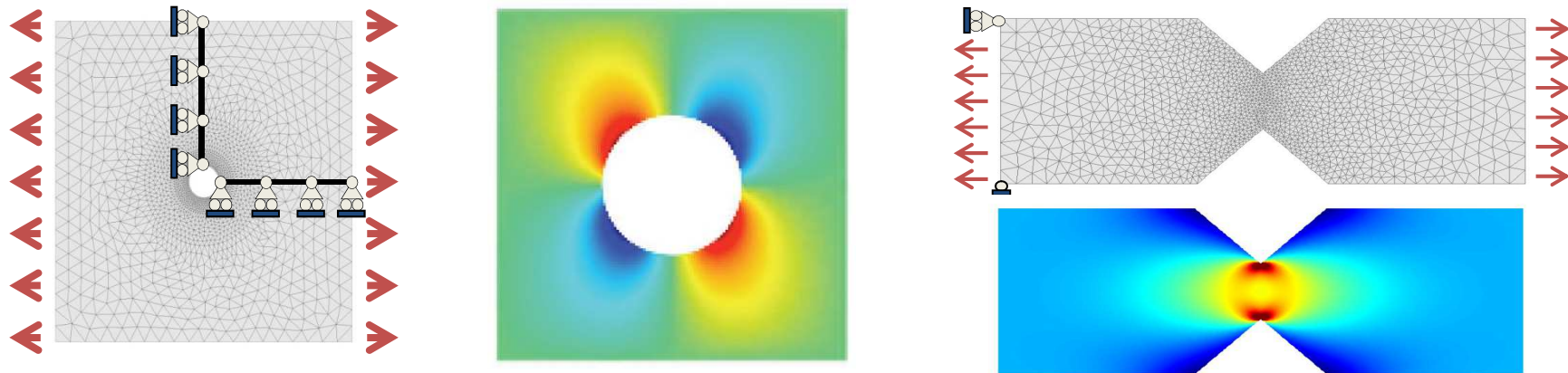


Quelques codes commerciaux:

Abaqus, Ansys (international)
Castem, Aster

Plan du cours

- 1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin
- 2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique
- 3- La méthode des éléments finis
- 4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux
- 6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode de Galerkin
5. Exemple 2D : déformation plane – élément linéaire triangulaire

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin
5. Exemple 2D : déformation plane – élément linéaire triangulaire

Les équations du problème

Hypothèses

Petite perturbation (HPP)

Tenseur des déformations linéarisé
 Tenseur des contraintes de Cauchy
 Déplacement

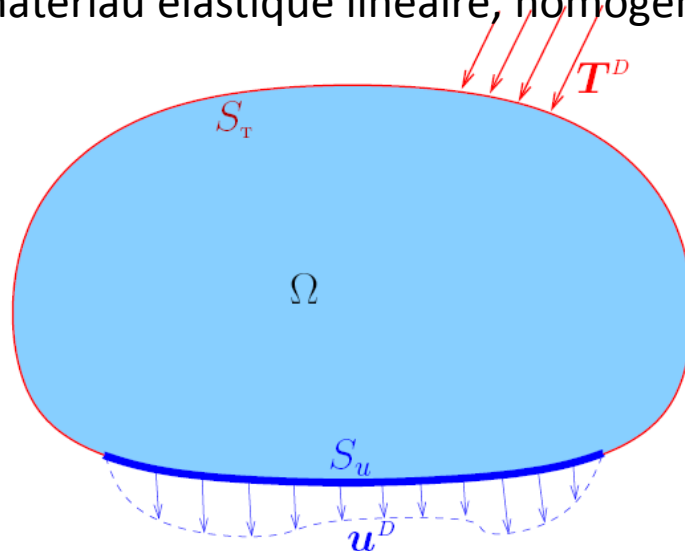
$$\| \underline{\varepsilon} \| \ll \| \underline{\sigma} \| \ll \| \underline{u} \|$$

Evolution quasi-static

Effets d'inertie négligé

Comportement

matériau élastique linéaire, homogène, isotrope



Les équations s'écrivent:

- Equation de compatibilité

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})$$

- Equation d'équilibre

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0$$

Force de masse

- Loi de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Tenseur d'élasticité

- Condition aux limites

$$\underline{u} = \underline{u}^D \quad (\text{on } S_u)$$

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \quad (\text{on } S_T)$$

Propriétés du tenseur d'élasticité

- \mathcal{A} satisfait les petites et grandes symétries

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij}$$

\mathcal{A} est définie positif

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T$$

- Les tenseur de souplesse \mathcal{S} (forme inverse de la loi de comportement)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \mathcal{A} : \mathcal{S} = \mathcal{S} : \mathcal{A} = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I} \text{ Tenseur identité du quatrième ordre } \mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

est définie positif

$$\underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\tau}}, \|\underline{\underline{\tau}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^T$$

Matériau élastique linéaire isotrope

Notation de Voigt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ & & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ & & & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ & \text{SYM} & & & A_{2323} & A_{2313} \\ & & & & & A_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \{\sigma\} &= [A]\{\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} > 0, \quad \forall \{\varepsilon\} \neq 0$$

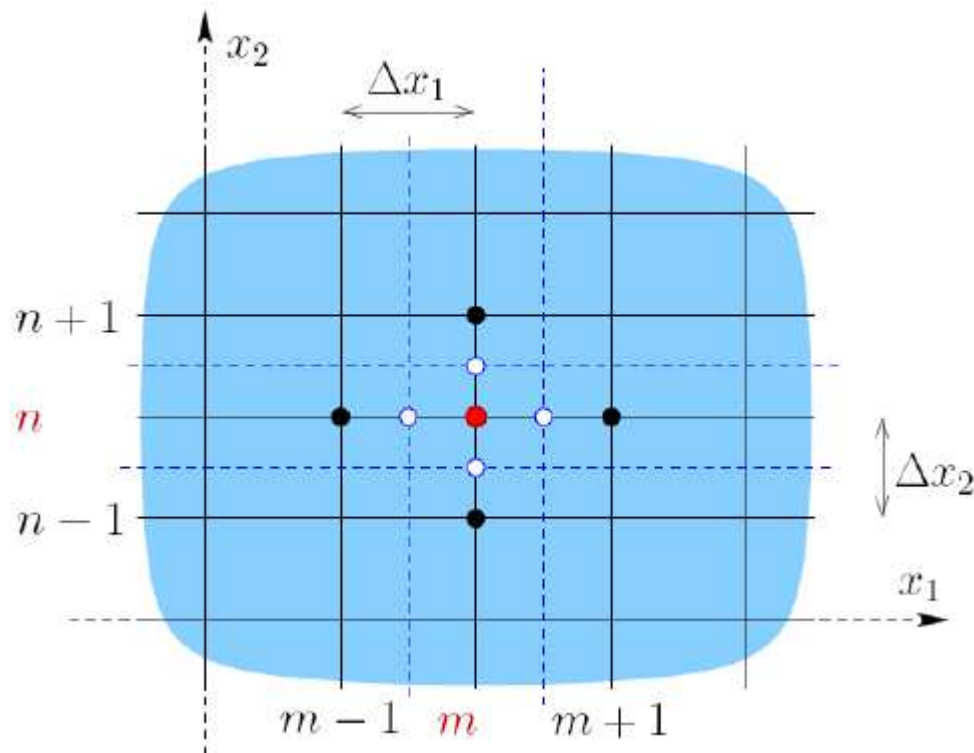
$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} \text{ (si isotrope)}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{2\mu} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1}\{\sigma\}$$

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Approximation par différence finie



$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)}) \approx \frac{1}{\Delta x_1} [u(\underline{x}^{(m+1, n)}) - u(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_2}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)}) \approx \frac{1}{\Delta x_2} [u(\underline{x}^{(m, n+1)}) - u(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\text{div}(\underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[u]) + \rho \underline{f} = \underline{0} \quad (\text{2nd order})$$

- ❑ Seulement pour des géométries simple (difficulté pour imposer des conditions aux limites)
- ❑ Les différences finies sont très peu utilisé en mécanique du solide pour la discrétisation en espace

Approximation par différence finie

Les Différences Finies:

- ❑ Très peu utilisée pour la discrétisation en espace en mécanique du solide
- ❑ Par contre, elle sera utilisée pour la discrétisation temporelle

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (f(t_{n+1}) - f(t_n)) \quad (\text{diffusion})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1})) \quad (\text{dynamics})$$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin
5. Exemple 2D : déformation plane – élément linéaire triangulaire

Les espaces de champs admissibles

- Espace de champs de déplacement suffisamment régulier (énergie bornée)

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continuous over } \Omega, \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV < +\infty \right\}$$

- Espace de champs comptable avec les conditions aux limites

- **Admissibilité cinématique** (déplacement):

$$\mathcal{C}(\underline{u}^D) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{u}^D \text{ on } S_u \}$$

- **Admissibilité statique** (contraintes)

$$\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) = \{ \underline{\underline{\tau}} \mid \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f} = 0 \text{ in } \Omega, \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ on } S_T \}$$

- Espace de champs compatible avec des conditions aux limites à zéro

$$\mathcal{C}(\underline{0}) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{0} \text{ on } S_u \}$$

Le problème d'équilibre en élasticité linéaire se ré-écrit :

$$\text{find } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ and } \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \text{ such that } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}](\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega)$$

Formulation faible

- Formulation faible des équations d'équilibre locales :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV}_{-\mathcal{P}_i(\underline{w})} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{w} \, dS}_{\mathcal{P}_e(\underline{w})} \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- s'obtient par intégration par partie :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}) \cdot \underline{w} \, dV = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- correspond au principe des puissances virtuelles (PPV)

- La loi de comportement et l'équation de compatibilité imposés point à point:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Formulation faible

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Remarques:

- pas de référence explicite aux conditions aux limites en déplacement
- inconnue \underline{T} sur S_u (forces de réaction associées aux déplacements imposés)

Deux possibilités (variantes de l'équation précédente):

- élimination de \underline{T} sur S_u
- imposer les conditions aux limites en déplacement u^D sur S_u de manière faible

Première variante: éliminer la réaction inconnue (\underline{T})

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- Restreindre le champs test \underline{w} aux champs cinématiquement admissible à zéro: on prend donc \underline{w} dans

$$\mathcal{C}(0) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{0} \text{ on } S_u \}$$

- \underline{u} satisfait les conditions aux limites de manière forte: $\underline{u} = \underline{u}^D$ on S_u

Remarque:
cadre classique
des codes FEM

Le problème s'écrit alors:

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Deuxième variante : CL déplacements imposées de manière faible

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- pas de restrictions sur \underline{w}
- CL en déplacement imposées de manière faible au travers d'une nouvelle équation

$$\int_{S_u} (\underline{u} - \underline{u}^D) \cdot \underline{T}' \, dS = 0 \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

find $(\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'(S_u)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

$$\int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS = \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

ou l'ensemble \mathcal{C}' des efforts admissibles est défini par dualité par rapport à \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}'(S_u) = \left\{ \underline{T}' \mid \forall \underline{w} \in \mathcal{C}, \int_{S_u} \underline{T}' \cdot \underline{w} \, dS < +\infty \right\}$$

Exemple typique des formulations dites "mixte"

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin
5. Exemple 2D : déformation plane – élément linéaire triangulaire

Formulation variationnelle

La solution du problème d'élasticité linéaire peut être défini comme étant le champ qui minimise une certaine fonctionnelle (énergie)

Les fonctionnelles énergies

Energie potentielle totale

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}) \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV \\ \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS\end{aligned}$$

Le champ de déplacement solution du problème minimise \mathcal{P} :

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

Energie potentielle totale complémentaire

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) - \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}) \\ \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} \, dV \\ \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS_x\end{aligned}$$

Le champ de contrainte solution du problème minimise \mathcal{P}^* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$$

Evidemment, une seule des deux minimisations est nécessaire !

Par exemple: $\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$

puis en calcul les champs de contrainte par la loi de comportement $\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$

Stationnarité de l'énergie potentielle totale

On considère le déplacement \underline{u} solution du problème puis on calcule la variation $\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w})$ $\underline{w} \in \mathcal{C}(0)$

$$\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{u}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle + o(|\eta|) \quad (\underline{w} \in \mathcal{C}(0))$$

Le minimum est caractérisé par l'annulation du terme du première ordre en η dans toutes les directions

$$\langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire, cela conduit à:

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

ce qui correspond à la forme faible (première variante – sans la réaction inconnue)

Formulation faible: multiplier la forme forte des équations locale par un fonction test puis IPP

Formulation variationnelle: correspond à imposer que la variation d'une certain fonctionnelle s'annule

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v})$$

$$\mathcal{W}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS$$

$$\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{u}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle + o(|\eta|) \quad (\underline{w} \in \mathcal{C}(0))$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} + \eta \underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} + \eta \underline{w}] =$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] + 2\eta \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] + \eta^2 \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]$$

$$\rho \underline{f} \cdot (\underline{u} + \eta \underline{w}) = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \eta \rho \underline{f} \cdot \underline{w}$$

$$\underline{T}^D \cdot (\underline{u} + \eta \underline{w}) = \underline{T}^D \cdot \underline{u} + \eta \underline{T}^D \cdot \underline{w}$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin
5. Exemple 2D : déformation plane – élément linéaire triangulaire

Minimisation approchée: méthode de Galerkin

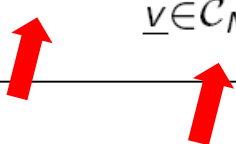
- ❑ Les ensembles $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ et $\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ de champs admissibles sont de **dimension infinie**

- ❑ La minimisation exacte:

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}) \qquad \underline{\sigma} = \arg \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$

est en règle général impossible
(complexité des géométries réelles ...)

- ❑ **Principe** : Minimisation dans un sous ensemble de **dimension finie**

$$\underline{u}_N = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}) \qquad \underline{\sigma}_N = \arg \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}_N(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$


Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

Minimisation de $\mathcal{P}(\underline{v})$ ou \underline{v} est de la forme

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \text{with } \underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D), \quad \underline{\varphi}^K \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

ou les fonctions de base $(\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^N)$ et le champs admissible $\underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ sont choisis a priori

- ➔ Liste des déplacements généralisés $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}^T$
- ➔ Matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^J] dV \quad (1 \leq I, J \leq N)$$

- ➔ Liste des efforts généralisées $\{\mathbb{F}\}$

$$F_I = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\varphi}^I dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\varphi}^I dS \quad (1 \leq I \leq N)$$

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}) \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] dV \\ \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} dS \end{aligned}$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

$[\mathbb{K}]$ est une matrice carrée $N \times N$, symétrique, définie positive

(si suffisamment CL en \underline{u} sont imposées):

$$\{\alpha\} \neq \{0\} \Rightarrow \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} > 0$$

$P(\{\alpha\})$ a un et un seul minimum défini par

$$\frac{\partial P}{\partial \{\alpha\}} = \{0\} \quad \text{or} \quad [\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

conduisant au déplacement généralisé optimal $\{\alpha^{\min}\} = [\mathbb{K}]^{-1} \{\mathbb{F}\}$

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ par construction}$$

REMARQUE IMPORTANTE:

$$\underline{\sigma}_N = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}](\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^K](\underline{x}) \notin \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \text{ in general}$$

Méthode de Galerkin pour la forme faible

Formulation faible d'un problème d'élasticité linéaire

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Le **choix** de l'inconnue et du champ virtuel:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \implies \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$$
$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x}) \quad \implies \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

conduit au **même système linéaire** :

$$\forall \{\alpha^*\} \in \mathbb{R}^N, \quad \{\alpha^*\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha^*\}^T \{\mathbb{F}\} = \{0\}$$
$$\implies [\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

Méthode de Galerkin: Quelques propriétés importantes (1/2)

Définissons la solution \underline{u} comme $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta \underline{u}$
($\Delta \underline{u}$ est ainsi l'“erreur” par rapport à la solution exacte)

□ Champ virtuel

$$\underline{w}_N(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x})$$

□ Formulation faible (écrite pour la solution **exacte** \underline{u})

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

□ Formulation faible (écrite pour la solution **approchée** \underline{u}_N)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

L'erreur $\Delta \underline{u}$ est orthogonale à tout champ virtuel appartenant à l'ensemble où la solution approchée est cherchée (au sens de la norme “énergétique”)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = 0$$

Méthode de Galerkin: Quelques propriétés importantes (2/2)

Calculons l'énergie de déformation de $\underline{u} - \underline{v}_N = \Delta \underline{u} + (\underline{u}_N - \underline{v}_N)$

Avec le champ cinématiquement admissible arbitraire $\underline{v}_N = \underline{u}^{(D)} + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K$

(on a toujours ... $\underline{u} - \underline{u}_N = \Delta \underline{u}$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV \\ & \quad + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV}_{=0 \text{ (orthogonality)}} \end{aligned}$$

Propriété de meilleure approximation:

\underline{u}_N est la meilleure approximation de la solution exacte \underline{u}

dans l'espace d'approximation choisi (au sens de la norme énergétique):

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle complémentaire

Minimisation de $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$ pour des champs de la forme

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\tau}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \beta_K \underline{\tau}^K(\underline{x})$$

Bien plus compliqué !!!!!

avec $\underline{\tau}^{(D)} \in \mathcal{S}(T^D)$ et $\underline{\tau}^K \in \mathcal{S}(0)$
choisi a priori

$$\mathcal{P}^*(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [S] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{U^d\} + \mathcal{P}^*(\underline{\tau}^{(D)}) = P^*(\{\beta\})$$

La solution approchés (en terme de contrainte) est définie par

$$[S] \{\beta\} = \{U^d\} \Rightarrow \{\beta^{\min}\} = [S]^{-1} \{U^d\}$$

***En règle général, il ne peut pas être intégré et
conduire à un champ cinématiquement admissible***

Discussion

Méthode de Galerkin : version en “déplacement”

Fonctions de base $(\underline{\varphi}^K)$ doivent être cinématiquement admissibles

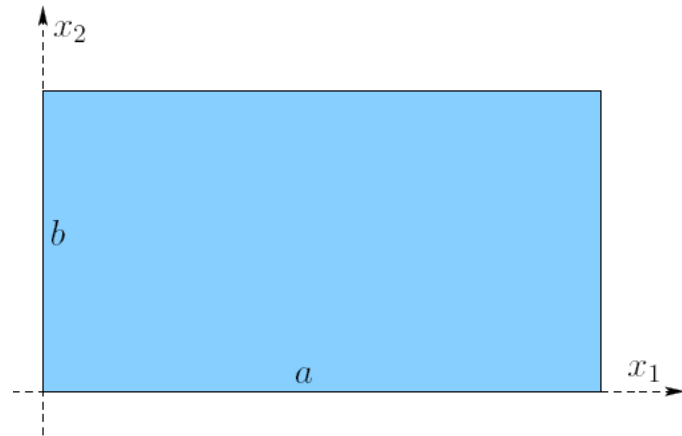
== > assez facile à construire (régularité + énergie finie)

Méthode de Galerkin : Version en “contrainte”

Les fonctions de bases $(\underline{\tau}^K)$ doivent être statiquement admissibles ($\text{div } \underline{\tau}^K = \underline{0}, \dots$)

== > bien plus difficile à construire

Exemple 1: Fonctions de base définies sur tout le domaine



Exemples:

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}^J(\underline{x}) &= (a) P_m(x_1)P_n(x_2)\underline{e}_j \\ &= (b) \sin\left(2\pi m \frac{x_1}{a}\right) \sin\left(2\pi n \frac{x_2}{b}\right)\underline{e}_j \\ &= \dots \\ &\text{(separation of variables)}\end{aligned}$$

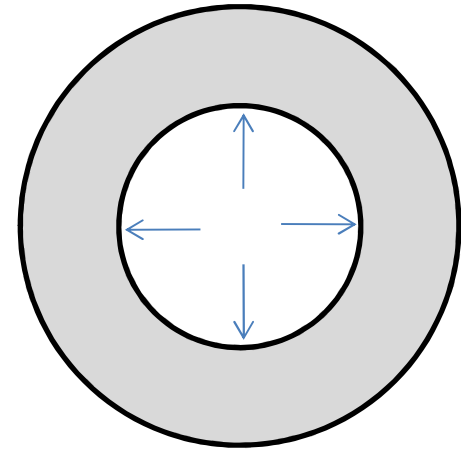
- ✓ la **convergence** de $\|\underline{u} - \underline{u}_N\|$ est très rapide (exponentiel versus le nombre de termes) si \underline{u} est suffisamment régulière
- ✓ Peu adaptée au géométrie complexe et aux problèmes avec des singularités
- ✓ Très peu utilisé en mécanique du solide mais ... beaucoup plus en **mécanique des fluides** (méthodes spectrales)

La sphère creuse

Sphère creuse (Rayon interne $r = R_1$, rayon externe $r = R_2$)

Soumise à une pression interne et un déplacement

$u(R_2) = d$ sur sa surface externe



$$v(r) \in \mathcal{C}(u^{(D)}): \quad v(r) = u^{(D)}(r) + \sum_{l=1}^N \alpha_l (r - r_2)^l$$

$$u^{(D)}(r) = d \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$$

Order of polynomes N	0	1	2	3
rel. err. \mathcal{P}	1.29087	0.442361	0.0596442	0.00501164
$\ u - u_N\ _0$	0.157699	0.0341987	0.00790153	0.00201395
$\ (du/dr) - (du_N/dr)\ _0$	0.423933	0.244242	0.0810537	0.0226432

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R_1}^{R_2} f^2 r^2 dr \right)^{1/2}$$

Exemple 2: Fonctions de base à support locale

== > introduction to Finite Elements

Difficulté des approches “globale”

- ✓ Peu adapté aux géométries complexes
- ✓ Difficulté pour imposer des conditions aux limites en déplacement

Principe de base de la Méthode des Éléments Finis (MEF):

Méthode de Galerkin avec des fonctions de base ayant un “petit” support

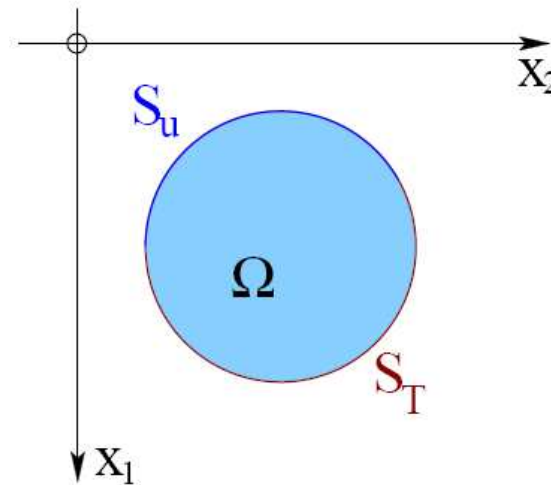
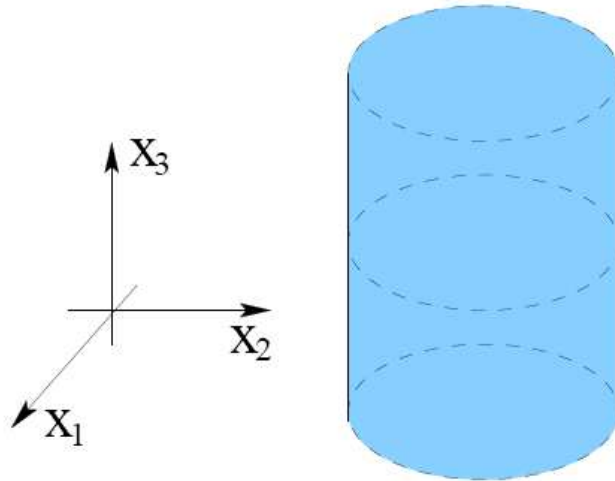
$$\underline{\varphi}^J = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_J$$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin
5. **Exemple 2D: déformation plane – élément linéaire triangulaire**
 - Maillage
 - Interpolation linéaire des déplacements
 - Le problème discrétisé

Hypothèse des déformations planes

La solution est invariante par rapport à x_3



Le champ de déplacement est de la forme:

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$$

$u_3 = 0$;
 u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_3

conduisant à :

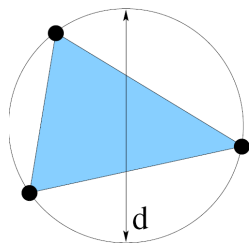
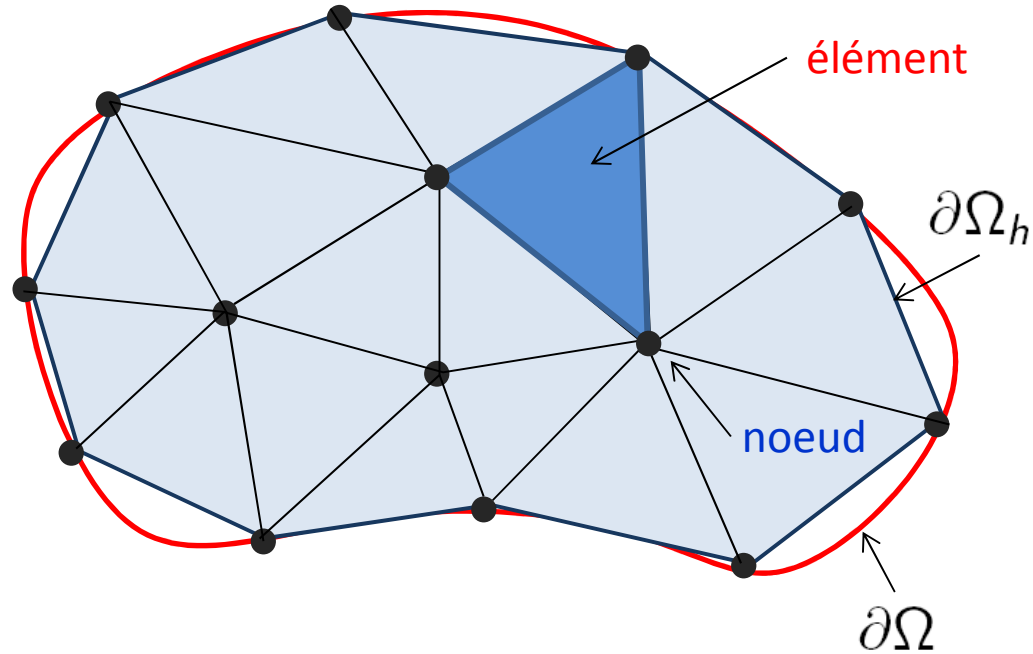
$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Autre cas: contrainte plane
 $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin
5. **Exemple 2D: déformation plane – élément linéaire triangulaire**
 - Maillage
 - Interpolation linéaire des déplacements
 - Le problème discrétisé

Maillage

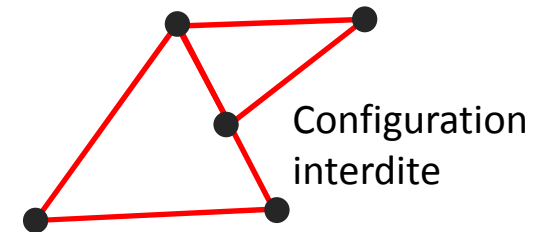


$$h = \max_{\text{elements}} d$$

1. Ω_h tend vers Ω quand $h \rightarrow 0$
2. $\Omega_h = \Omega$ si Ω à bord droit par morceau

Décomposition de Ω en des **éléments** triangulaire (sans recouvrement) partageant entre eux des **noeuds**

== > Construction de Ω_h



2 éléments peuvent seulement:

- intersection vide
- un sommet en commun
- une arête en commun

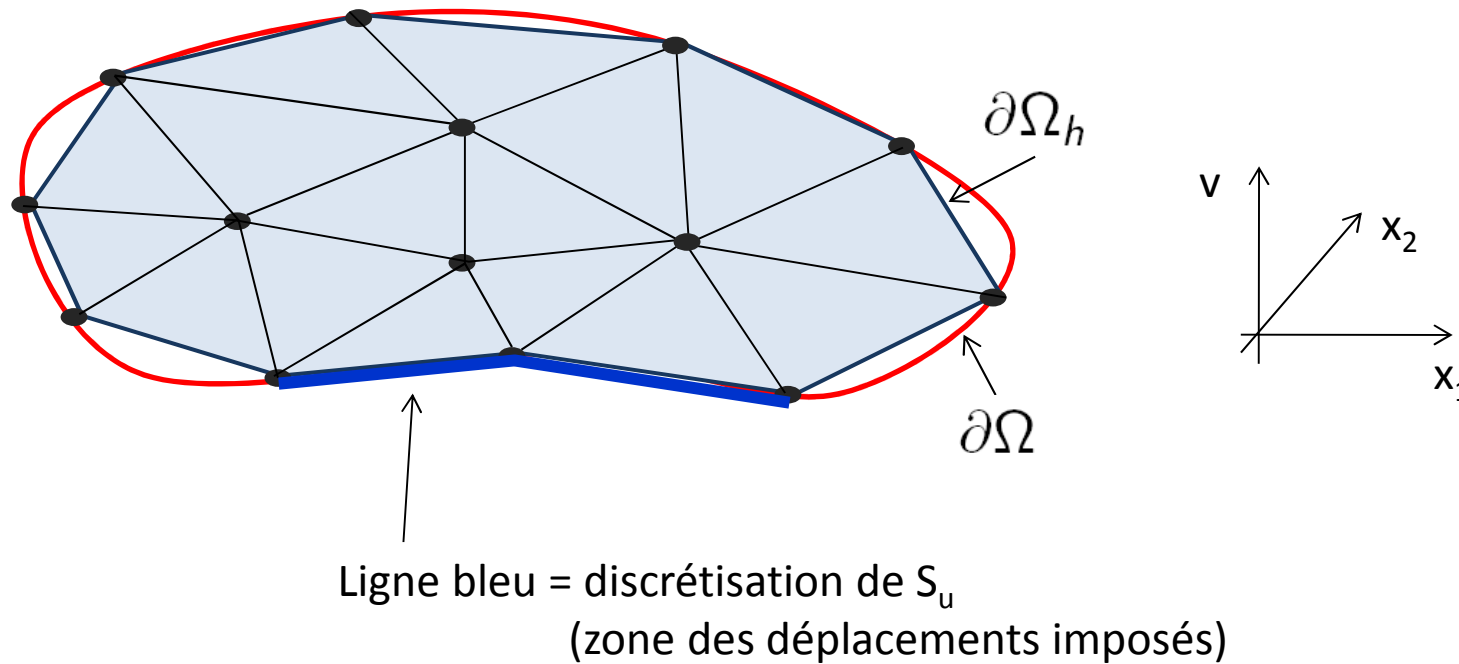
Le maillage est créé par des codes dédiés (par exemple gmsh).

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

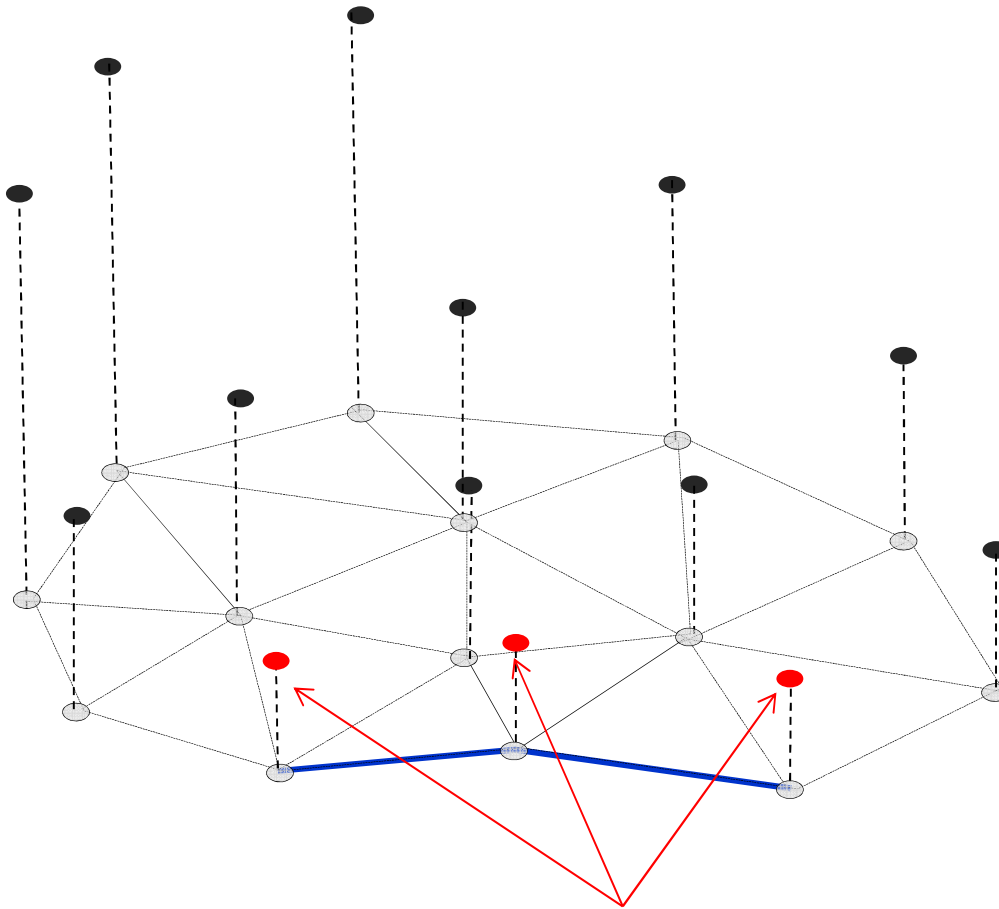
1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin
5. **Exemple 2D: déformation plane – élément linéaire triangulaire**
 - Maillage
 - Interpolation linéaire des déplacements
 - Le problème discrétisé

Interpolation linéaire des déplacements

Le maillage est construit en prenant en compte le problème à résoudre (conditions aux limites ...)

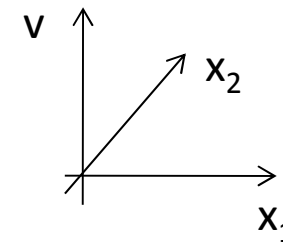


Interpolation linéaire des déplacements (choix de l'espace)



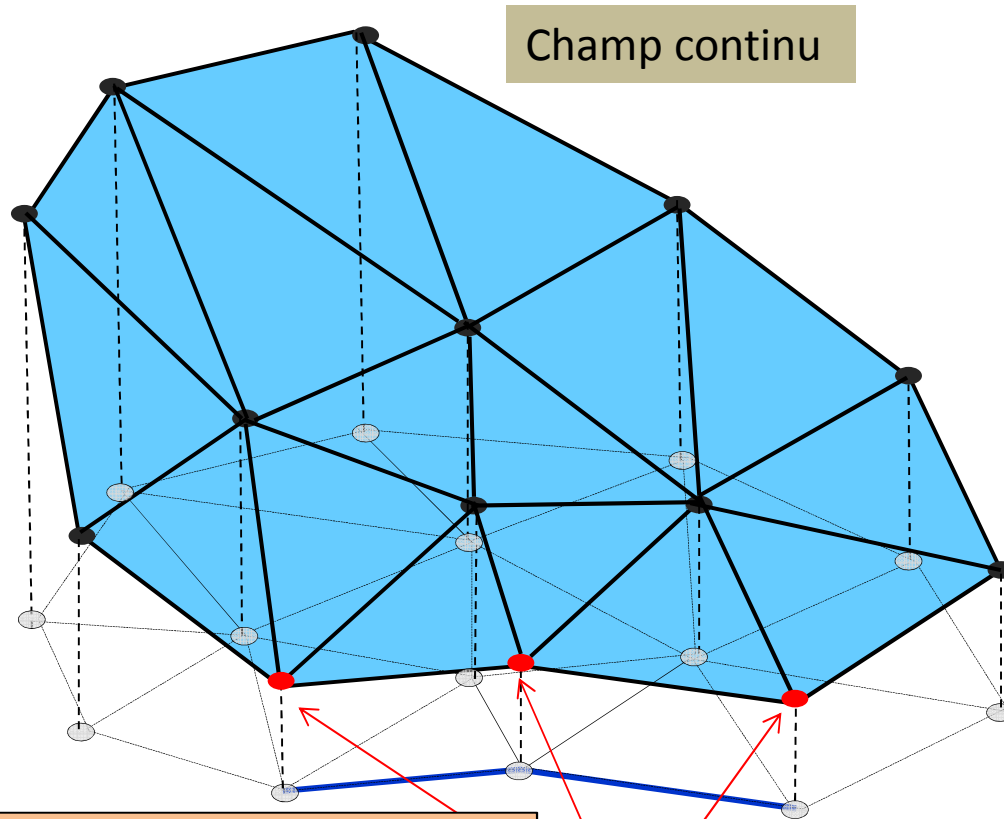
Considérons donc un champ scalaire
(par ex., une composante du champ de déplacement, le champ de température ...)

On dessine les “valeurs nodales” du champ



Valeurs nodales imposées (connue sur $S_{\underline{u}}$)

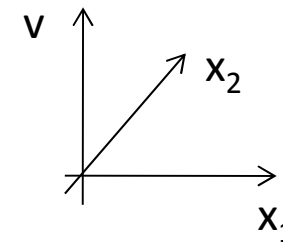
Interpolation linéaire des déplacements (choix de l'espace)



Champ continu

... puis interpolation linéaire sur chaque élément

La surface polygonale bleue représente un champ cinématiquement "admissible"



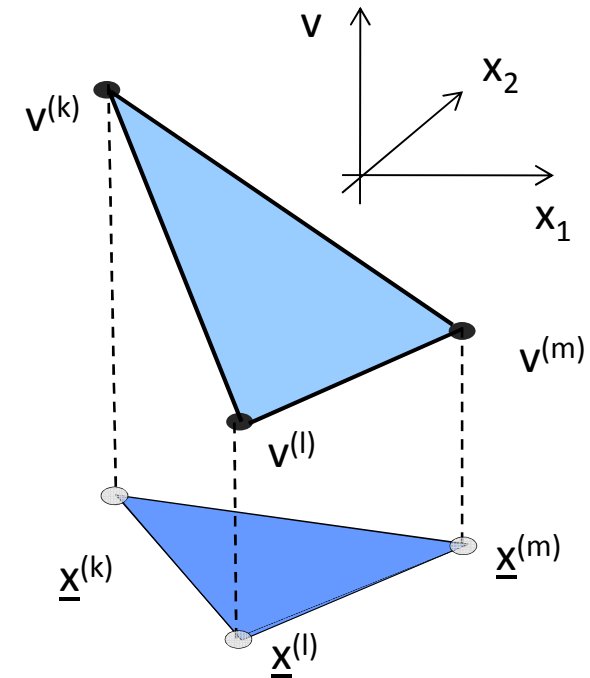
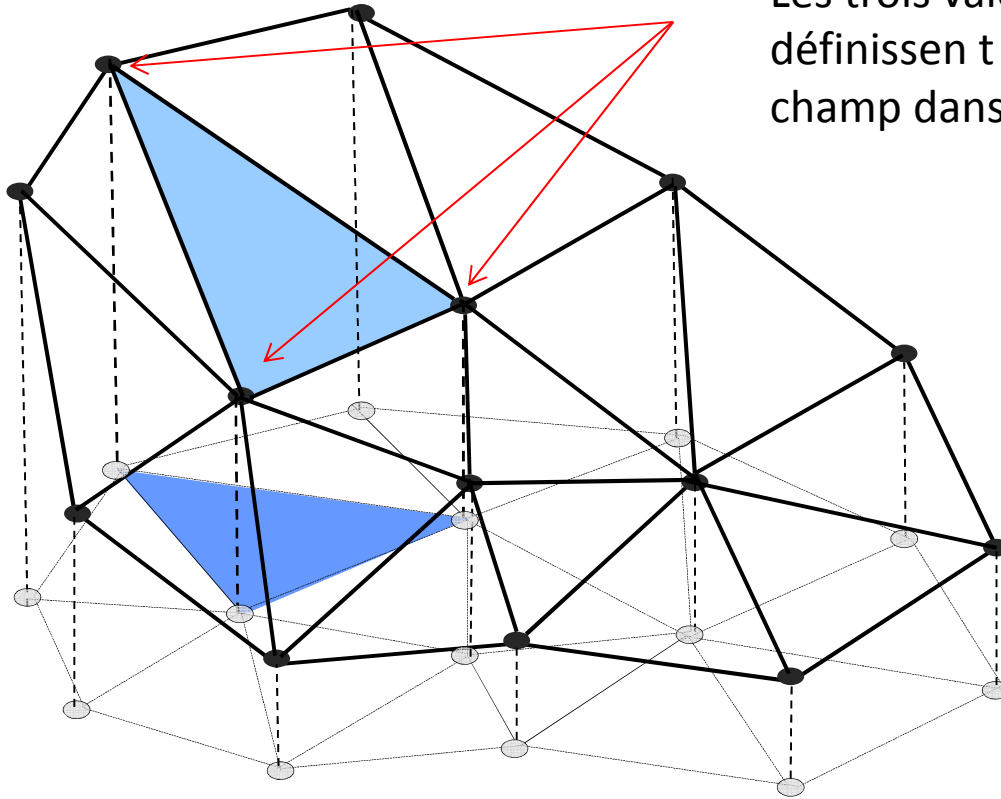
==> construction d'un espace de dimension finie de fonction linéaires par morceaux définies par ses valeurs nodales sur un maillage donné.

Valeurs nodales imposées (connue sur S_u) (imposition approchée des conditions aux limites en déplacement)

Interpolation linéaire des déplacements

Regardons plus particulièrement un élément

Les trois valeurs nodales définissent complètement le champ dans l'élément



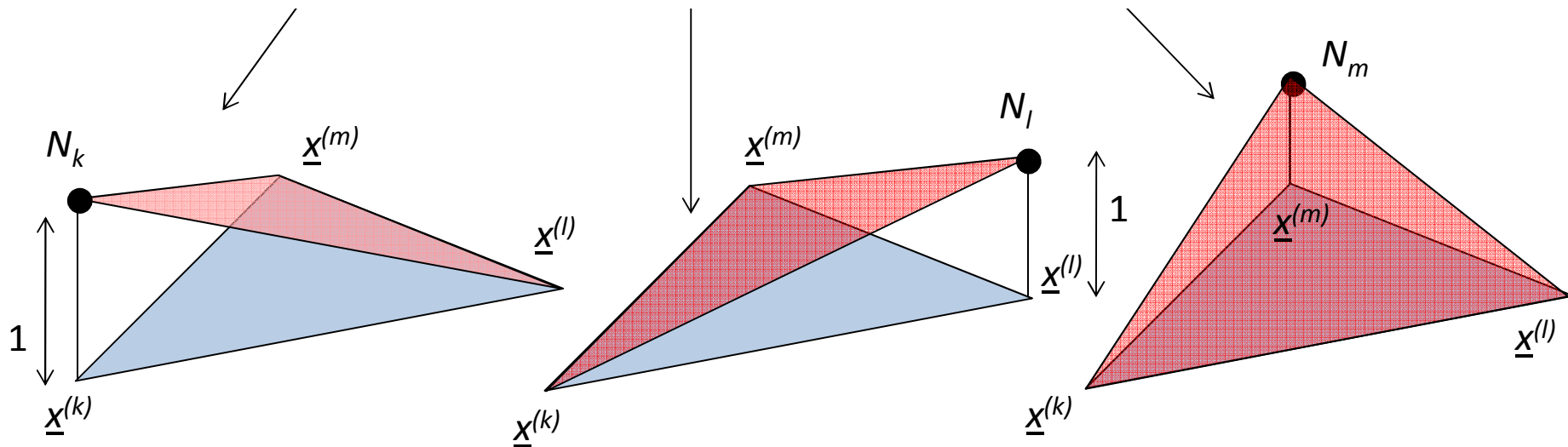
- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$v_h(\underline{x}) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \iff v_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)v^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)v^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)v^{(m)}$$

C'est seulement une façon particulière d'écrire un champs linéaire!

Fonctions de forme (locales)

$$v_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)v^{(k)} + N_l(x_1, x_2)v^{(l)} + N_m(x_1, x_2)v^{(m)}$$



N_k , N_l , et N_m sont appelées **fonctions de forme** et sont:

1. linéaire en (x_1, x_2)
1. satisfont la propriété « du Kronecker »: $N_k(\underline{x}^{(l)}) = \delta_{kl}$

Parfois appelée fonctions de forme « locales » et « élémentaires » en opposition aux fonctions de forme « globales » (voir plus loin)

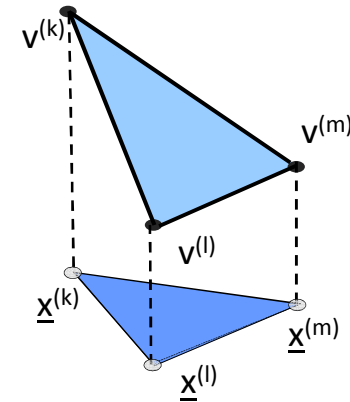
Interpolation linéaire des déplacements

- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)\underline{v}^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)\underline{v}^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)\underline{v}^{(m)}$$

$N_k, N_l,$ et N_m sont appelées **fonctions de forme**, elles sont:

1. linéaire en (x_1, x_2)
2. satisfont la propriété «du Kronecker»: $N_k(\underline{x}^{(l)}) = \delta_{kl}$



Interpolation linéaire pour toutes les composantes du déplacement

Les fonctions de forme s'écrivent sous la forme:

$$N_p(x_1, x_2) = c_0^{(p)} + c_1^{(p)}x_1 + c_2^{(p)}x_2 \quad (p = k, \ell, m)$$

Les coefficients $c_0^{(p)}, c_1^{(p)}$ et $c_2^{(p)}$ dépendent uniquement des coordonnées $(x_1^{(p)}, x_2^{(p)})_{p=k,l,m}$ des noeuds de l'éléments

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}_h]$ associé à est **constant** sur l'élément T

== > conséquence directe de l'interpolation linéaire

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

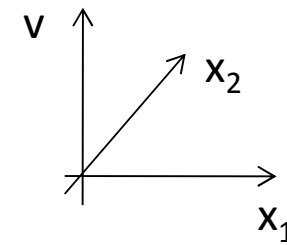
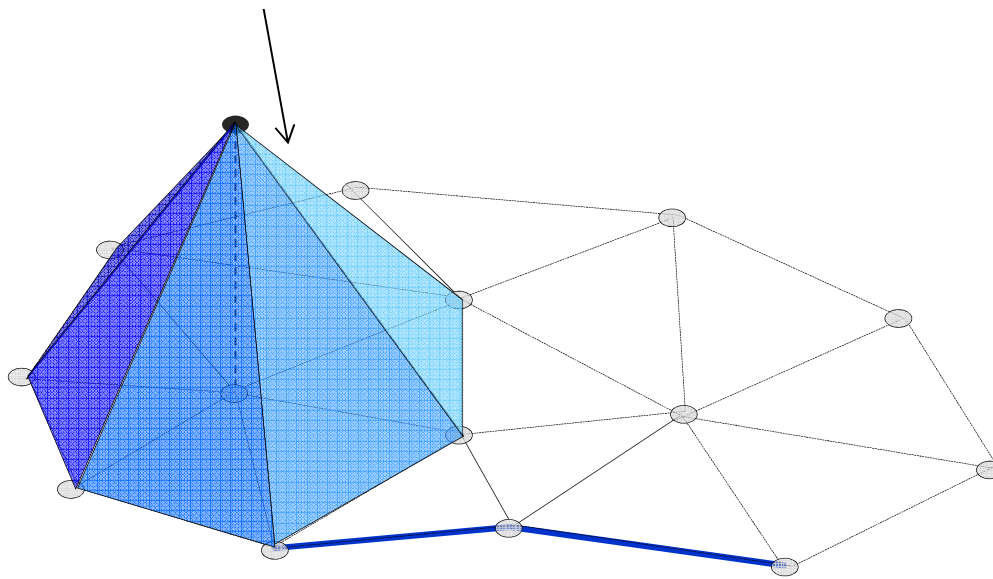
1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin
5. **Exemple 2D: déformation plane – élément linéaire triangulaire**
 - Maillage
 - Interpolation linéaire des déplacements
 - Le problème discrétisé

Le problème discrétisé

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}$$

Fonctions de forme globales sont les fonctions de bases de l'espace d'approximation

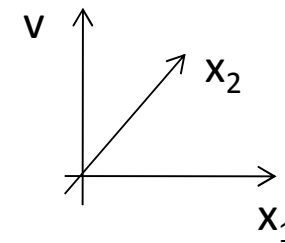
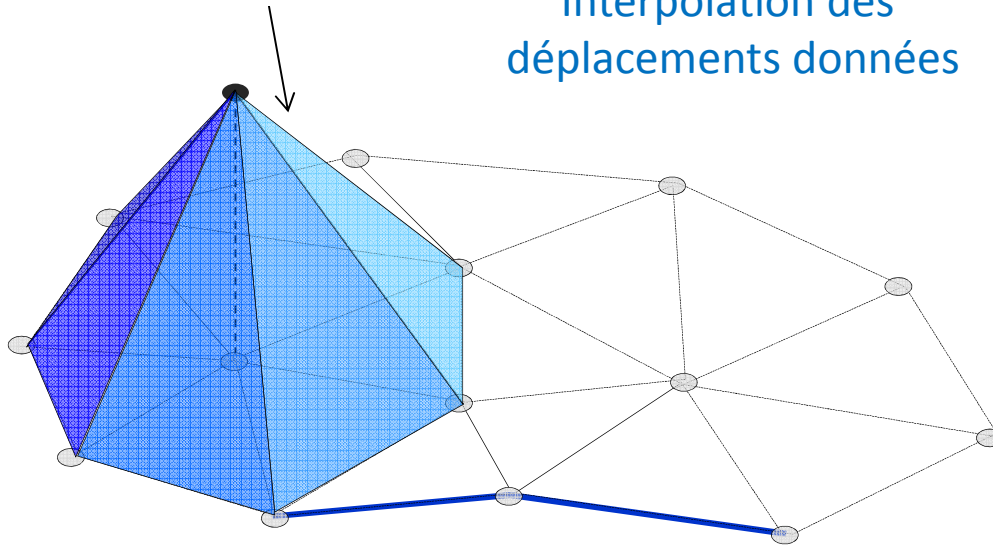


Le problème discrétisé

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

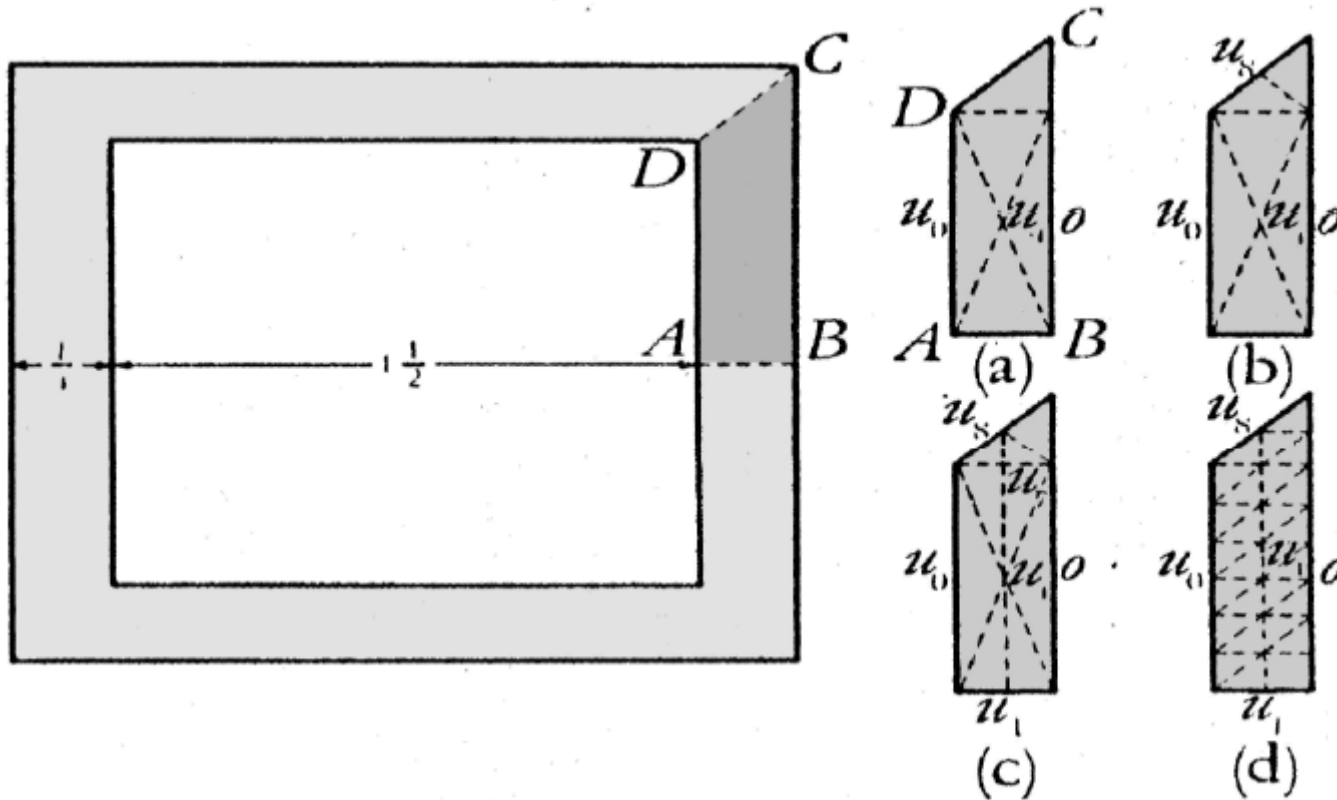
$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} = \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \in S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{u}^D(\underline{x}^{(n)})}_{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} + \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \notin S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}}_{\alpha_K = v_j^{(n)}, \varphi^K(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j}$$

Fonctions de forme globales
Interpolation des déplacements données
Interpolation des déplacements inconnues



- Le domaine d'analyse est le domaine "discrétisé" Ω_h
- $\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D)$: **cinématiquement admissible** au sens de l'approximation ainsi définie (EF)

Premiers travaux sur les Éléments Finis



Torsion d'un tube: $\Delta\varphi = 0$ ($\varphi(x_1, x_2)$: fonction de gauchissement)

Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Amer. Mathem. Soc., 49:1-23 (1943).