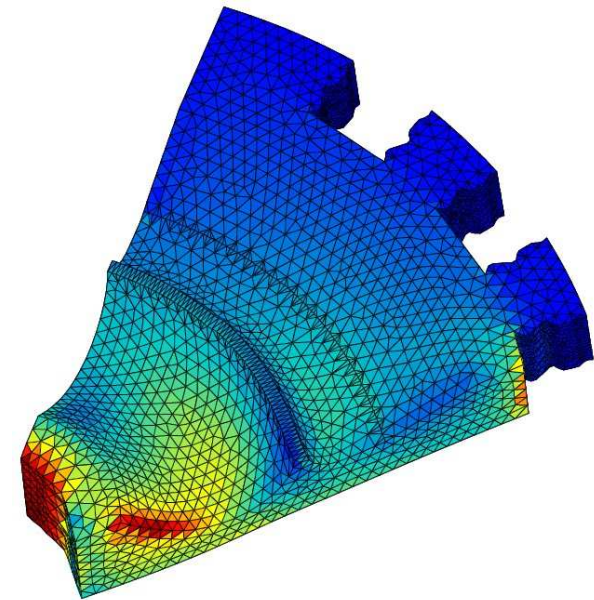
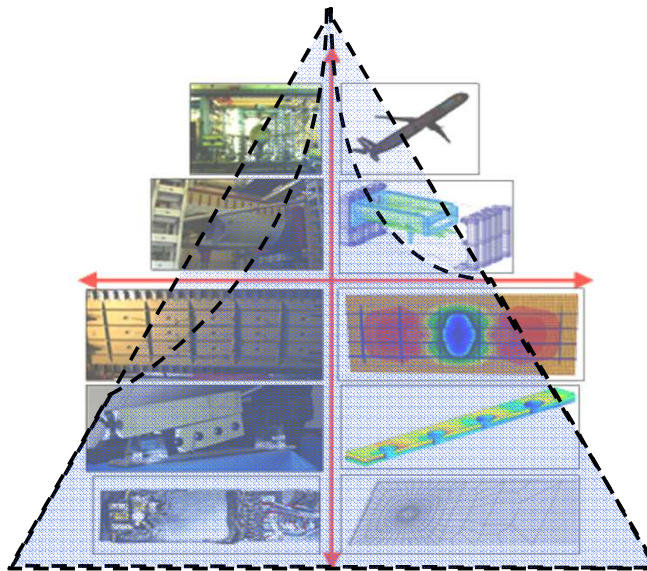
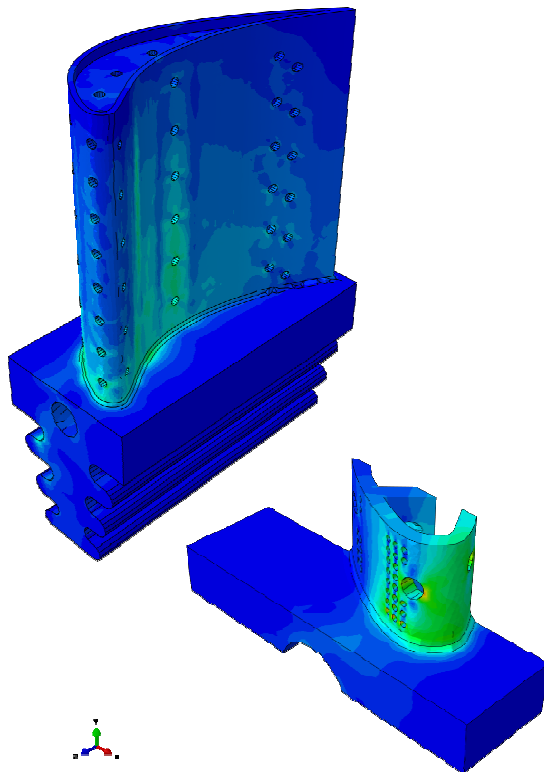


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

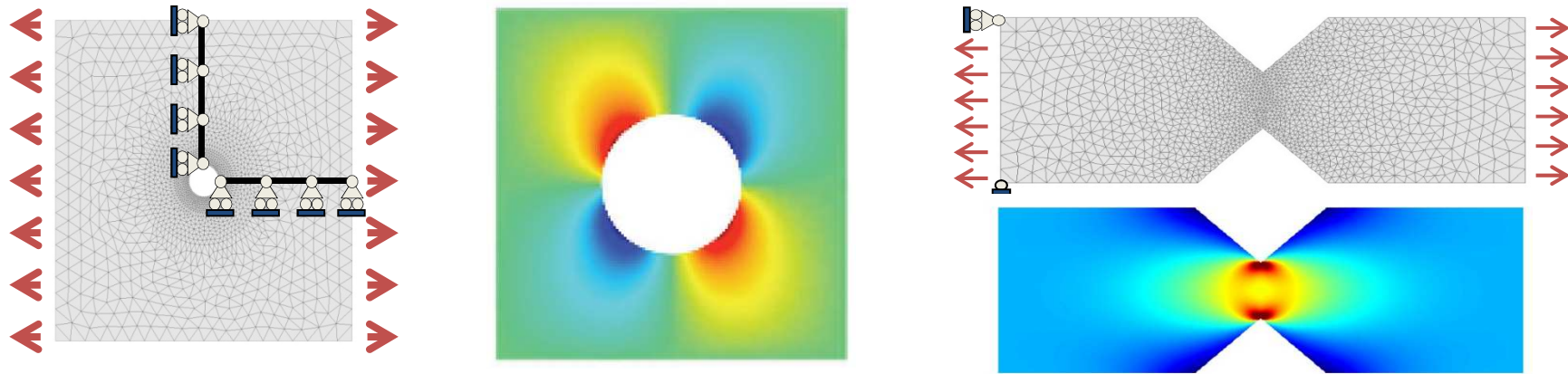
Christian Rey

christian.rey@safrangroup.com



Plan du cours

- 1- Elasticité linéaire – Méthode de Galerkin - Eléments finis isoparamétriques
- 2- La méthode des éléments finis
- 3- Introduction aux calculs de structures non-linéaires
- 4- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux**




Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Octave

Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Plan du cours

1. Introduction
 1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
 2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
 3. Comportement élastoplastique (rappels)

2. Calcul de solides élastoplastiques
 1. **Aspects locaux (algorithme de retour radial)** 
 2. Aspects globaux (Opérateur tangent cohérent)

3. Elasticité en transformations finies : exemple du flambage
 1. Equations de l'élasticité en transformation finies
 2. Déformations infinitésimales – grands déplacements

Chapitre 3




Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant


Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution 
 1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
 2. Principe de la résolution numérique (rappel)
 3. Résolution du problème global : approche itérative
 4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

Chapitre 3

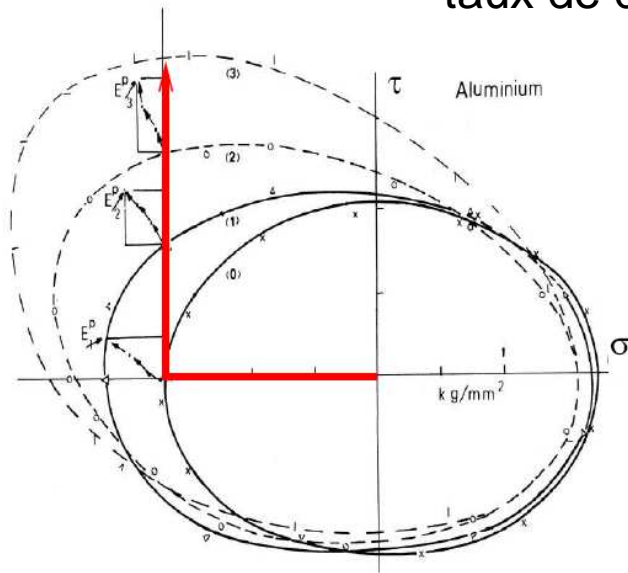
Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
 2. Principe de la résolution numérique (rappel)
 3. Résolution du problème global : approche itérative
 4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
 3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
- 

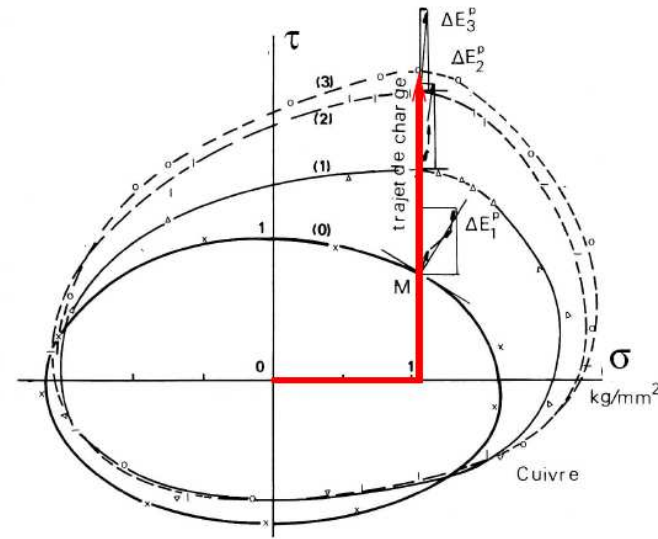
Rappel : Surface de charge et règle de Normalité

- Observation expérimentale :

taux de déformation plastique est **normal** à la surface de charge



[Bui, 1970]



- Formulation de la règle de normalité

$$\begin{cases} \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \text{ is directed as the outgoing normal to } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$: multiplicateur plastique (a priori inconnu)

Rappel : Critère de Von Mises (1913)

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}}_{\text{Terme de pression}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Limite d'élasticité} \\ \text{Contrainte équivalente} \\ \text{Déviateur des contraintes} \end{array}$$

- **Limite indépendante de la pression**
- **Utilisé pour décrire la plasticité des métaux**
(déformation plastique due au cisaillement, dislocations du réseau cristallin)
- Pour une traction uniaxiale $\underline{\sigma} = \sigma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$ on a $\sigma^{\text{eq}} = \sigma$ (justification du coef $\sqrt{3/2}$)
- R : limite élastique observé sous un chargement de traction uniaxial

Rappel : règle de normalité pour le critère de Von Mises

- Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- Règle de normalité

Purement déviatorique

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- Lien entre $\dot{\gamma}$ et \dot{p} :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = \dot{\gamma}$$

Loi de comportement s'écrit finalement :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

Rappel : Synthèse

➤ Hypothèses

- HPP, linéaire, isotrope, élastique
- Critère de Von Mises
- Règle de normalité, écrouissage isotrope

Loi de comportement linéaire élastique isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

➤ Loi de comportement

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\|$$

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}})$$

Elasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0$$

Règle de normalité

Hypothèse sur $R(p)$ (convexité de $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$)

(i) $R(0) = R_0$ (ii) $R'(p) \geq 0$

(iii) $R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

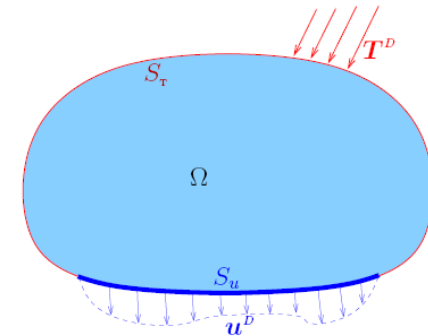
Rappel : Hypothèses et équations du problème

Critère Von Mises

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \quad \text{Limite d'élasticité} \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \quad \text{Contrainte équivalente} \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \quad \text{Déviateur des contraintes} \end{array} \right.$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$$



$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) && \text{in } \Omega \times [0, T] && \text{(compatibility)} \\ \text{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} &= \underline{0} && \text{in } \Omega \times [0, T] && \text{(equilibrium)} \\ \underline{\sigma} &= \kappa \text{tr}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) \underline{1} + 2\mu(\underline{e} - \underline{e}^p) && && \text{(constitutive law, elastic part)} \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{s}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0, \quad \dot{p}[\sigma^{\text{eq}} - R(p)] = 0 && && \text{(constitutive law, plastic part)} \\ \underline{u}(\underline{x}, t) &= \underline{u}^D(\underline{x}, t) && \text{on } S_u \times [0, T] && \text{(imposed displacements)} \\ \underline{T}(\underline{x}, t) &= \underline{T}^D(\underline{x}, t) && \text{on } S_T \times [0, T] && \text{(external loading)} \\ \underline{\varepsilon}^p(\underline{x}, 0) &= \underline{0} && \text{in } \Omega && \text{(initial condition)} \end{aligned}$$

Où, \underline{e} , \underline{e}^p et \underline{s} sont les parties déviatoriques de $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}^p$ et $\underline{\sigma}$

Et $p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\underline{\varepsilon}}^p(\tau)\| d\tau$ la déformation plastique cumulée

Chapitre 3

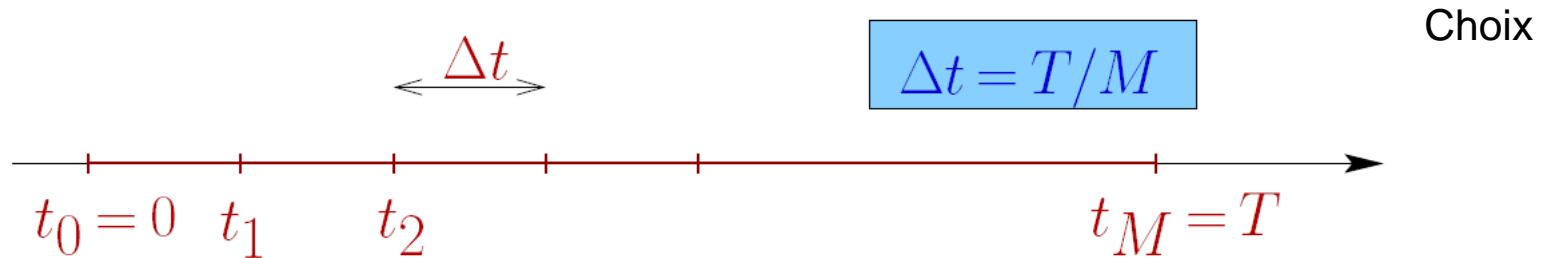
Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 1. Hypothèse et équations du problème (rappel)
 2. Principe de la résolution numérique (rappel)
 3. Résolution du problème global : approche itérative
 4. Résolution des problèmes linéarisés par la MEF
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant



Rappel : Discrétisation temporelle

Recherche de solutions pas à pas



➤ Objectif de l'algorithme :

(notation : $f_n(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}, t_n)$)

Calculer l'état mécanique $\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^p, \underline{\sigma}_n \dots\}$ chaque instant $t = t_n$



➤ Approche incrémentale : calculer les états mécanique $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M$ pas à pas

Formulation d'un algorithme qui :

Connaissant l'état mécanique \mathcal{S}_n et le chargement $(\underline{f}_{n+1}, \underline{u}_{n+1}^D, \underline{T}_{n+1}^D)$

donne l'état mécanique \mathcal{S}_{n+1}

Rappel : Problème à l'instant t_{n+1}

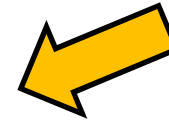
Pour chaque incrément $S_n \rightarrow S_{n+1}$:

- Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant $t = t_{n+1}$
- Discrétisation en espace (FEM) ; approximation de $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

- Loi de comportement (\mathcal{F} : opérateur associé à **l'algorithme de retour radial**) :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; S_n)$$



Rappel : Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$ (elastic predictor), then $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$ and $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas,eq}}$;

Rappel : Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$ (elastic predictor), then $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$ and $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$;

(b) Compute $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n)$ and **test** :

▶ **If** $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$ (**elastic evolution**), solution given by :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n \quad \text{(END)}$$

▶ **If** $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0$ (**elastoplastic evolution**) :

(i) Solve $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$ for Δp_n ;

(ii) Compute the increment of plastic strains

$$\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \frac{3\Delta p_n}{2\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} ;$$

(iii) Update variables :

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} + \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n + \Delta p_n$$

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta\underline{\varepsilon}_n) \underline{1} + 2\mu(\Delta\underline{e}_n - \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}) \quad \text{(END)}$$

Rappel : Problème à l'instant t_{n+1}

Pour chaque incrément $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$:

➤ Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant $t = t_{n+1}$

➤ Discrétisation en espace (FEM) ; approximation de $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

➤ Loi de comportement (\mathcal{F} : opérateur associé à **l'algorithme de retour radial**) :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n ; \mathcal{S}_n)$$

➤ Equilibre + Loi de comportement à l'instant $t = t_{n+1}$

➤ **Le problème au pas de temps $t=t_{n+1}$, s'écrit :**

Inconnue $\Delta \underline{u}_n = \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n$, solution (via un algorithme itératif) de

Trouver $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$ tel que $R(\Delta \underline{u}_n ; \underline{v}, \mathcal{S}_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{C}(0)$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n ; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n] ; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

Problème à l'instant t_{n+1} : Formulation global

Trouver $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$ tel que $R(\Delta \underline{u}_n; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

avec

problème non linéaire

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

➤ Mise en oeuvre de la méthode de Newton Raphson

➤ Procédure itérative : construction d'une séquence

$$\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}, \quad \text{i.e.} \quad \delta \underline{u}_n^{(k)} = \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} - \Delta \underline{u}_n^{(k)}$$

➤ Par linéarisation autour de $\Delta \underline{u}_n^{(k)}$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0$$

➤ Application linéaire tangente global \mathcal{R}' définie par :

$$\mathcal{R}(\underline{v} + \underline{z}; \underline{w}, S_n) - \mathcal{R}(\underline{v}; \underline{w}, S_n) = \langle \mathcal{R}'(\underline{v}; \underline{w}, S_n), \underline{z} \rangle + o(\|\underline{z}\|)$$

➤ Application linéaire tangente : deux possibilités

➤ Méthode de Newton avec opérateur tangent


== > calcul de l'application linéaire tangente $\mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n)$

➤ Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

== > approximation de $\mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n)$ par une application linéaire constante


Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 - 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent** 
 3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
1. Opérateur tangent local
 2. Opérateur tangent global
 3. Algorithmes de résolution

Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
 1. Opérateur tangent local 
 2. Opérateur tangent global
 3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

Opérateur tangent Cohérent

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n)$$

$$\mathcal{R}(\Delta_{\underline{\underline{u}}}_n; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta_{\underline{\underline{u}}}_n]; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{w}} dV - \int_{S_T} \underline{\underline{T}}_{n+1}^D \cdot \underline{\underline{w}} dS$$

- L'application linéaire tangent global \mathcal{R}' est définie par :

$$\mathcal{R}(\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{z}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) - \mathcal{R}(\underline{\underline{v}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n) = \langle \mathcal{R}'(\underline{\underline{v}}; \underline{\underline{w}}, \mathcal{S}_n), \underline{\underline{z}} \rangle + o(\|\underline{\underline{z}}\|)$$

- Linéarisation de l'application \mathcal{F} :

$$\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta_{\underline{\underline{u}}}]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) - \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) &= \langle \mathcal{F}'(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n), \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \\ &= \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) : \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}; \mathcal{S}_n) : \delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + o(\|\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\|) \end{aligned}$$

- Le tenseur du 4ième ordre $\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{(k)}; \mathcal{S}_n)$ s'appelle **l'opérateur tangent local**

Opérateur tangent local

$$\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n) = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n)$$

avec (Amphi 2)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) = \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_n + \mathcal{A} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}_{\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}} - 2\mu \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}}$$

➤ Cas 1 : pas d'évolution plastique : $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} = \underline{\underline{0}}$

$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{\text{elas}}$, $\Delta p_n = 0$, et par conséquent

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) = \mathcal{A}$$

➤ Cas 2 : avec évolution plastique : $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}} \neq \underline{\underline{0}}$

Tenseur d'élasticité

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) = \mathcal{A} - 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{\text{P}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

Expression de la “correction plastique” \mathcal{D}

$$\frac{\partial \underline{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n^p}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

- Calcul des dérivées de (i) $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$, (ii) $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$, (iii) Δp_n

$$(i) \quad \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{s}_n + 2\mu \Delta \underline{e}_n \quad ==> \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec \mathcal{K} : projection dans l'espace déviatorique, exemple: $\Delta \underline{e} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\varepsilon}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad ==> \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \frac{\partial \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}}{\partial \Delta \underline{\varepsilon}_n} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \mathcal{K} : \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Expression de la “correction plastique” \mathcal{D}

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

- Calcul des dérivées de (i) $\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$, (ii) $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$, (iii) Δp_n

$$(i) \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec \mathcal{K} : projection dans l'espace déviatorique, exemple: $\Delta \underline{\underline{e}} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \{ \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \}$$

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} - 3\mu \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} - \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} R(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

avec $R'_{n+1} = R'(p_{n+1}) = R'(p_n + \Delta p_n)$

Expression de la “correction plastique” \mathcal{D}

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \mathcal{A} - \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = 2\mu \frac{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right)$$

➤ Calcul des dérivées de (i) $\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$, (ii) $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$, (iii) Δp_n

$$(i) \quad \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\underline{s}}_n + 2\mu \Delta \underline{\underline{e}}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}$$

avec \mathcal{K} : projection dans l'espace déviatorique, exemple: $\Delta \underline{\underline{e}} = \mathcal{K} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$(ii) \quad \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} : \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}})^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \{ \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

avec $R'_{n+1} = R'(p_{n+1}) = R'(p_n + \Delta p_n)$

Expression de la “correction plastique” \mathcal{D}

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} = 2\mu \mathcal{K}, \quad \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \frac{\partial \Delta p_n}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

Que l'on utilise pour le calcul de la correction plastique

$$\mathcal{D} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \right) \quad \mathcal{D}_{ijkl} = 3\mu \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{kl,n}} \left(\frac{\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} s_{ij,n+1}^{\text{elas}} \right)$$

i.e.

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}}{\partial \Delta \varepsilon_{kl,n}} = \frac{3\mu}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} s_{kl,n+1}^{\text{elas}} \quad s_{ij,n+1}^{\text{elas}} s_{kl,n+1}^{\text{elas}} \leftrightarrow \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}} \otimes \underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) = 3\mu(\gamma - \beta) \left(\frac{\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}_{n+1}^{\text{elas}}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \right) + 2\mu\beta \mathcal{K}$$

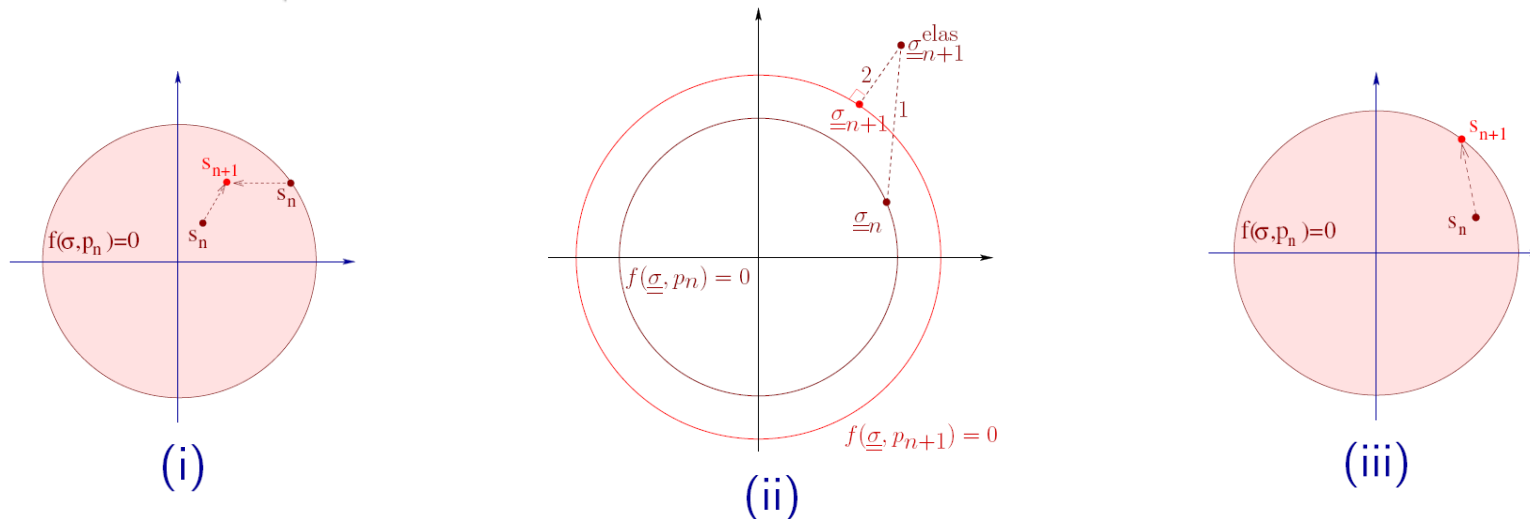
$$\beta = \frac{3\mu \Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} = 1 - \frac{R_{n+1}}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \quad \gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R'_{n+1}}$$

➤ La correction plastique \mathcal{D} : tenseur du 4ième ordre (même symétrie que \mathcal{A})

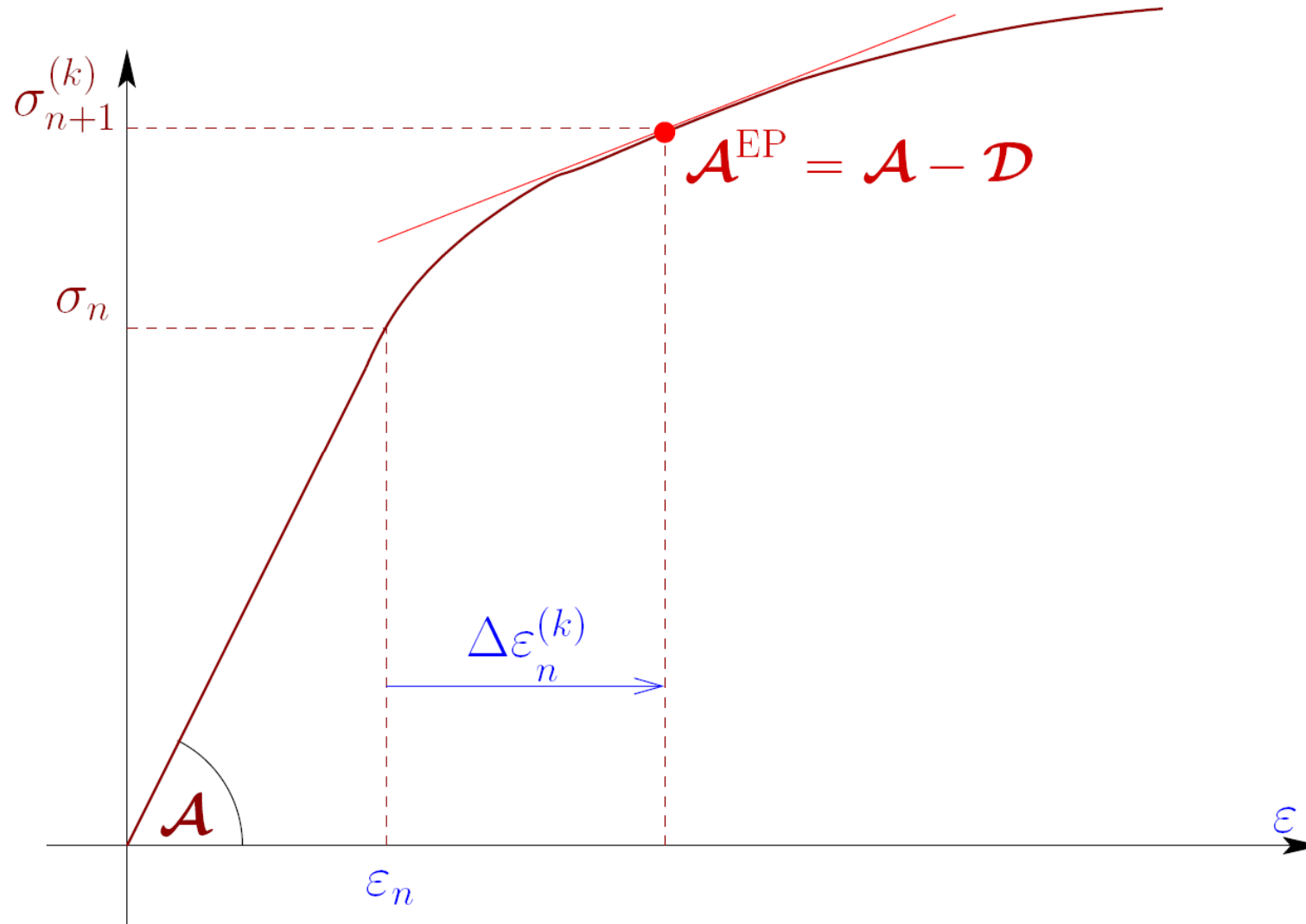
Opérateur tangent local \mathcal{A}^{EP} : synthèse

$$\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n) = \begin{cases} \mathcal{A} & \text{si } f_{n+1}^{\text{elas}} < 0 \text{ (évolution élastique)} \\ \mathcal{A} - \mathcal{D}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}^{(k)}; \mathcal{S}_n) & \text{si } f_{n+1}^{\text{elas}} > 0 \text{ (évolution élastoplastique)} \end{cases}$$

- $\mathcal{F}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n)$ différentiable par rapport à $\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}$ si
 - (i) $f_{n+1}^{\text{elas}} < 0$ (dans le domaine d'élasticité)
 - (ii) $f_{n+1}^{\text{elas}} > 0$ (évolution plastique $\Delta p_n \neq 0$)
- $\mathcal{F}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}, \mathcal{S}_n)$ non différentiable par rapport à $\Delta_{\underline{\varepsilon}_n}$ si
 - (iii) $f_{n+1}^{\text{elas}} = 0$ avec $\Delta p_n = 0$ (situation limite)



Opérateur tangent local \mathcal{A}^{EP} : interpretation



Algo 4 : Algorithme de retour radial *avec matrice tangente*

(a) Evaluate $\underline{\underline{s}}^{\text{elas}} = \underline{\underline{s}}_n + 2\mu\mathcal{K}:\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}$ (elastic predictor) and $\sigma^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\underline{s}}^{\text{elas}}\|$;

Algo 4 : Algorithme de retour radial *avec matrice tangente*

(a) Evaluate $\underline{s}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\mathcal{K}:\Delta\underline{\varepsilon}$ (elastic predictor) and $\sigma^{\text{elas,eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{s}^{\text{elas}}\|$;

(b) Compute $f^{\text{elas}} = f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) = \sigma^{\text{elas,eq}} - R(p_n)$. Two alternatives :

► Si $f^{\text{elas}} \leq 0$, **elastic evolution** :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+1} &= 3\kappa\text{Tr}(\Delta\underline{\varepsilon})\underline{1} + \underline{s}^{\text{elas}}, \\ \Delta\underline{\varepsilon}^{\text{P}} &= \underline{0}, \quad \mathcal{A}^{\text{EP}} = \mathcal{A} \end{aligned} ;$$

► If $f^{\text{elas}} > 0$, **elastoplastic evolution** :

(i) Solve for Δp :

$$\sigma^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p - R(p_n + \Delta p) = 0 ;$$

(ii) Evaluate the constants β, γ : $\beta = \frac{3\mu\Delta p}{\sigma^{\text{elas,eq}}}$ $\gamma = \frac{3\mu}{3\mu + R'(p_n + \Delta p)}$;

(iii) Update $\underline{\sigma}$ and $\underline{\varepsilon}^{\text{P}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{n+1} &= (1 - \beta)\underline{s}^{\text{elas}} + \kappa\text{Tr}(\Delta\underline{\varepsilon})\underline{1} ; \\ \Delta\underline{\varepsilon}^{\text{P}} &= (\beta/2\mu)\underline{s}^{\text{elas}} \end{aligned} ;$$

(iv) Create the elastoplastic stiffness tensor \mathcal{A}^{EP} :

$$\mathcal{A}^{\text{EP}} = \mathcal{A} - 3\mu(\gamma - \beta) \left(\frac{\underline{s}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \otimes \frac{\underline{s}^{\text{elas}}}{\sigma^{\text{elas,eq}}} \right) - 2\mu\beta\mathcal{K}.$$

Calcul pratique de l'opérateur linéaire tangent

$$\mathcal{A}^{EP} = \mathcal{A} - 3\mu(\gamma - \beta) \left(\frac{\underline{\underline{s}}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} \otimes \frac{\underline{\underline{s}}^{elas}}{\sigma^{elas,eq}} \right) - 2\mu\beta\mathcal{K}$$

- ▶ Notation de Voigt (utile pour la programmation)

$$[A^{EP}] = [A] - [D] \quad \text{avec} \quad [D] = \frac{3\mu(\gamma - \beta)}{(\sigma^{elas,eq})^2} \{s^{elas}\} \{s^{elas}\}^T + 2\mu\beta[\mathcal{K}]$$

avec


$$\mathcal{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} = [\mathcal{K}] \{\varepsilon\} \quad \text{où} \quad [\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\{s\} = \{\sigma\} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

$$\sigma^{eq} = \left[\frac{3}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + 3s_{12}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{23}^2 \right]^{1/2}$$

Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
 1. Opérateur tangent local
 2. Opérateur tangent global 
 3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

Problème à l'instant t_{n+1} : Formulation globale

Trouver $\Delta \underline{u}_{n+1} \in C(\Delta \underline{u}_{n+1}^D)$ tel que $R(\Delta \underline{u}_{n+1}; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

$$\text{avec } \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

➤ Mise en oeuvre de la méthode de Newton Raphson

➤ Procédure itérative : construction d'une séquence

$$\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}, \quad \text{i.e.} \quad \delta \underline{u}_n^{(k)} = \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} - \Delta \underline{u}_n^{(k)}$$

➤ Par linéarisation autour de $\Delta \underline{u}_n^{(k)}$: $\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0$

➤ Opérateur tangent local $\mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n)$ (Le tenseur du 4ième)

Linéarisation de l'application \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) - \mathcal{F}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) = \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + o(\|\delta \underline{\underline{\varepsilon}}\|) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}; S_n) : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + o(\|\delta \underline{\underline{\varepsilon}}\|)$$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}]$$

➤ Expression de l'application linéaire tangente globale

$$\langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV$$

Algo 3 : Matrice de tangente élastoplastique élémentaire

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \sum_e \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{\varepsilon}}([\delta \underline{u}_n^{(k)}]) : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] d\Omega_e \\ &= \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^{\text{D}} \cdot \underline{w} dS \\ -\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\} &= \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{int}(k)}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}) \end{aligned}$$

Algo 3 : Calcul éléments par éléments

Entrée $\{\sigma_n\}$ (valeur aux points de Gauss), $\{\Delta \mathbb{U}_e\}$

Sorties $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$, $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$ (matrices élémentaires)

$\{\sigma_{n+1}\}$, $\{\Delta p\}$, $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}\}$ (valeur aux points de Gauss)

Algo 3 : Matrice de tangente élastoplastique élémentaire

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \sum_e \int_{\Omega_e} (\underline{\underline{\varepsilon}}([\delta \underline{u}_n^{(k)}]) : \mathbf{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]) d\Omega_e \\ &= \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_{n+1}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \{\delta \mathbb{U}_n^{(k)}\} = [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} T_{n+1}^{\text{D}} \cdot \underline{w} dS \\ -\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(k)}\} &= \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{int}(k)}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}) \end{aligned}$$

Algo 3 : Calcul éléments par éléments

Entrée $\{\sigma_n\}$ (valeur aux points de Gauss), $\{\Delta \mathbb{U}_e\}$

Sorties $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$, $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$ (matrices élémentaires)

$\{\sigma_{n+1}\}$, $\{\Delta p\}$, $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}}\}$ (valeur aux points de Gauss)

- (i) Initialisation de la matrice tangente élémentaire : $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] = [0]$;
- (ii) Initialisation des forces nodales internes élémentaires : $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} = \{0\}$;
- (iii) Pour $g = 1, 2, \dots, G$ (boucle sur les points de Gauss \underline{a}_g , de poids w_g , de E_e):
 - (a) Incrément de déformation : $\{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{a}_g)\} = [B(\underline{a}_g)]\{\Delta \mathbb{U}_e\}$;
 - (b) Calcul de $\{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\}$, $\Delta p(\underline{a}_g)$ et $[A^{\text{EP}}(\underline{a}_g)]$ (**Algo 4**)
 - (c) Contribution du point de Gauss à $[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}]$:

$$[\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] := [\mathbb{K}_e^{\text{EP}}] + [B(\underline{a}_g)]^T [A^{\text{EP}}(\underline{a}_g)] [B(\underline{a}_g)] J(\underline{a}_g) w_g$$
 - (d) Contribution du point de Gauss à $\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\}$:

$$\{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} := \{\mathbb{F}_e^{\text{int}}\} + [B(\underline{a}_g)]^T \{\sigma_{n+1}(\underline{a}_g)\} J(\underline{a}_g) w_g$$

Contraintes & déformation plastiques doivent être **sauvegardée MAIS** seulement **aux points de Gauss**

Algo 2 : Assemblage - $[K^{EP}]$ et $\{F^{int}\}$

In : List of nodal displacement increment $\{\Delta U_n\}$

Out : Global tangent matrix $[K^{EP}]$, global nodal forces $\{F^{\Delta u}\}$, $\{F^{int}\}$.

(i) Initialisation : $[K^{EP}] = [0]$, $\{F^{\Delta u}\} = \{0\}$, $\{F^{int}\} = \{0\}$;

(ii) For $e = 1, 2, \dots, N_E$ (loop over elements) :

Procédure d'assemblage = comme en élasticité linéaire

Algo 2 : Assemblage - $[K^{EP}]$ et $\{F^{int}\}$

In : List of nodal displacement increment $\{\Delta U_n\}$

Out : Global tangent matrix $[K^{EP}]$, global nodal forces $\{F^{\Delta u}\}$, $\{F^{int}\}$.

(i) Initialisation : $[K^{EP}] = [0]$, $\{F^{\Delta u}\} = \{0\}$, $\{F^{int}\} = \{0\}$;

(ii) For $e = 1, 2, \dots, N_E$ (loop over elements) :

(a) Extract nodal values relevant to element $\{\Delta U_{n,e}\}$;

(b) Compute $[K_e^{EP}]$ and $\{F_e^{int}\}$ **Algo 3**

(c) Assembly : $[K_e^{EP}] \longrightarrow [K^{EP}]$, $\{F^{\Delta u}\}$

$\{F_e^{int}\} \longrightarrow \{F^{int}\}$

Procédure d'assemblage = comme en élasticité linéaire

Problème à l'instant t_{n+1} : Formulation globale

Pas de temps (approche incrémentale) $\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta \underline{u}_n$

Trouver $\Delta \underline{u}_n \in C(\Delta \underline{u}_n^D)$ tel que $R(\Delta \underline{u}_n; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

$$\mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n]; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

Itération en pas de temps $\Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}$

Initialisation : $\Delta \underline{u}_n^{(1)} = \underline{0}$

Itération 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}_n^{(1)} \in C(\Delta \underline{u}_n^{(D)}) \\ \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(1)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(1)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(1)} \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\delta \underline{u}_n^{(1)} = \underbrace{\delta \underline{u}_n^{(1,0)}}_{\in C(\underline{0})} + \underbrace{\Delta \underline{u}_n^{(D)}}_{\in C(\Delta \underline{u}_n^D)}$$

Itération k --> k+1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}_n^{(k)} \in C(\underline{0}) \\ \mathcal{R}(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n) + \langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\langle \mathcal{R}'(\Delta \underline{u}_n^{(k)}; \underline{w}, S_n), \delta \underline{u}_n^{(k)} \rangle = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{EP}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(k)}; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV$$

Algo 2 : Première itération

Time step

Iteration in time-step

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(k)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(k)}; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV =$$

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta \underline{u}_n \quad \Delta \underline{u}_n^{(k+1)} = \Delta \underline{u}_n^{(k)} + \delta \underline{u}_n^{(k)}$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\Delta \underline{u}_n^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

► **Initialisation** : $\Delta \underline{u}_n = \underline{0}$;

► **Iteration 1** : decomposition

$$\delta \underline{u}_n^{(1)} = \underbrace{\delta \underline{u}_n^{(1,0)}}_{\in \mathcal{C}(0)} + \underbrace{\Delta \underline{u}_n^{(D)}}_{\in \mathcal{C}(\Delta \underline{u}_n^D)}$$

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}_n] \{\delta \underline{U}_n^{(k)}\}$$

Find $\delta \underline{u}_n^{(1,0)} \in \mathcal{C}(0)$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(1,0)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV =$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}_n^{(D)}] : \mathcal{A}^{\text{EP}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}_n^{\Delta u}\}$$

$$- \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}_n] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

$$- \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}_{n+1}^{(1)}\} = \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}_n^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbb{F}_{n+1}^{\text{surf}}\})$$

Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
 1. Opérateur tangent local
 2. Opérateur tangent global
 3. Algorithmes de résolution
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant



Algo 1 :

Entrée : Maillage, temps t_0, \dots, t_M , Loi de comportement, chargement, tolérance ε

(a) Initialisation Générale


- (i) Conditions initiales $\{\mathbf{U}_0\}, \{\boldsymbol{\sigma}_0\}, \{p_0\}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}_0^P\}$;
- (ii) Initialisation : $\{\mathbf{F}^{\text{int}}\} = \{0\}$
Assemblage $[\mathbb{K}^{\text{EP}}] = [\mathbb{K}], \{\mathbf{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta \underline{u}_0^D = \underline{u}_1^D - \underline{u}_0^D$

(b) Pour chaque incrément de chargement : $n=0, 1, \dots, M-1$, repeat

- (i) Initialisation : $\{\Delta \mathbf{U}\} = \{0\}$;
- (ii) Force nodales : $\{\mathbf{F}^{\text{ext}}\} = \{\mathbf{F}_{n+1}^{\text{vol}}\} + \{\mathbf{F}_{n+1}^{\text{surf}}\}$;
- (iii) Résidu : $-\{\mathbb{R}\} = \{\mathbf{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\} + \{\mathbf{F}^{\Delta u}\}, r^{\text{ref}} = \|\{\mathbb{R}\}\|, r = r^{\text{ref}}$;
- (iv) **Itérations** : Pour $k = 1, \dots$ **et tant que** $r > \varepsilon r^{\text{ref}}$
 - (a) Résoudre : $[\mathbb{K}^{\text{EP}}]\{\delta \mathbf{U}\} := -\{\mathbb{R}\}$; Actualise : $\{\Delta \mathbf{U}\} := \{\Delta \mathbf{U}\} + \{\delta \mathbf{U}\}$;
 - (b) Assemblage : $[K^{\text{EP}}(\Delta \mathbf{U})], \{\mathbf{F}^{\text{int}}(\Delta \mathbf{U})\}$ and $\{\mathbf{F}^{\Delta u}\} \leftarrow \Delta \underline{u}_{n+1}^D$ **Algo 2**
 - (c) Résidu : $\{\mathbb{R}\} := -\{\mathbf{F}^{\text{int}}\} - \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\}, r = \|\{\mathbb{R}\}\|.$
- (v) Actualise : $\{\mathbf{U}_{n+1}\} = \{\mathbf{U}_n\} + \{\Delta \mathbf{U}\}, \{\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P\} = \{\underline{\underline{\varepsilon}}_n^P\} + \{\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P\}.$

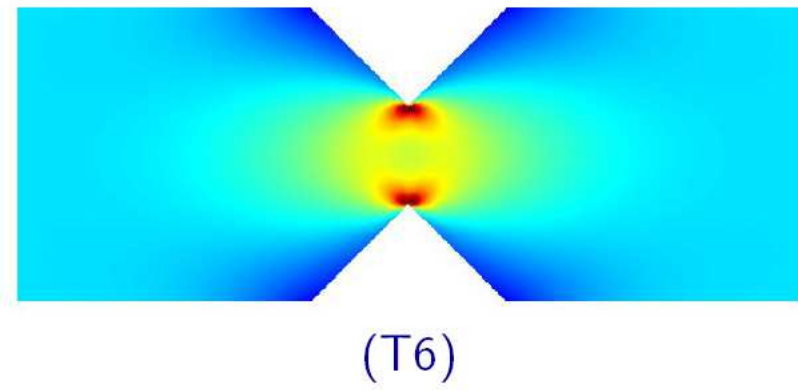
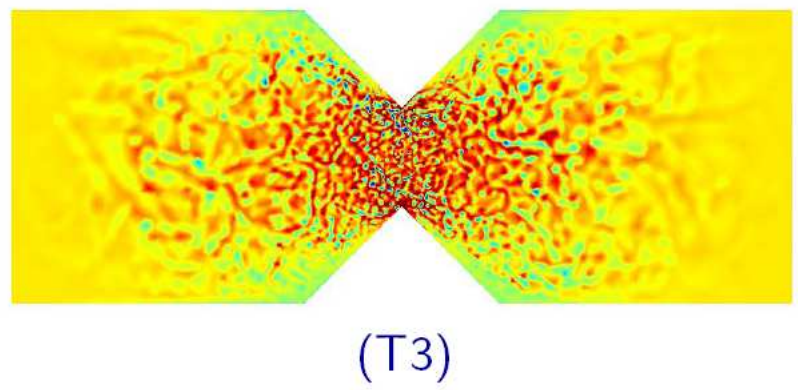
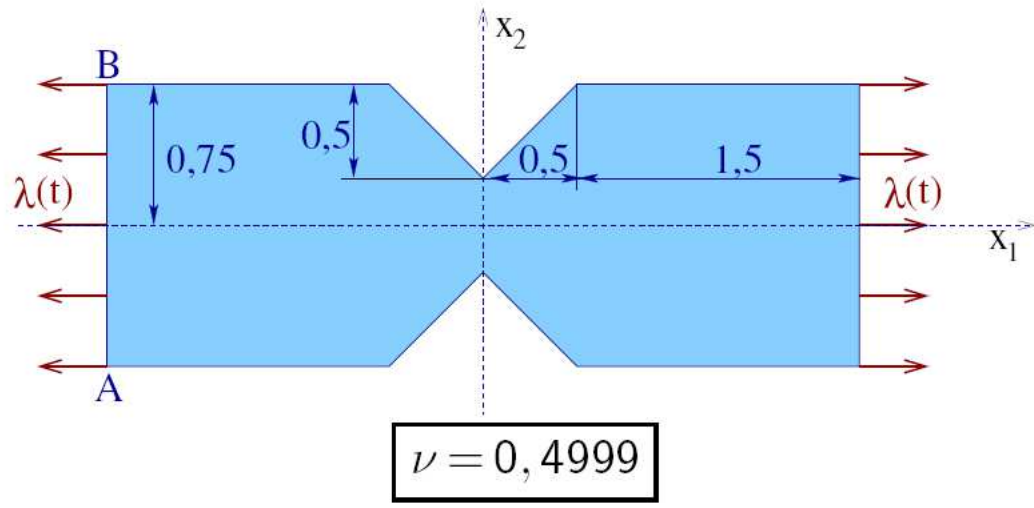
Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
- 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent**
 1. Opérateur tangent local
 2. Opérateur tangent global
 3. Algorithmes de résolution
 4. Quelques précautions ... 
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant


Attention : incompressibilité

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^P) = 0$$



Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
 3. **Méthode de Newton avec opérateur tangent constant**
- 

Méthode de Newton avec opérateur tangent constant

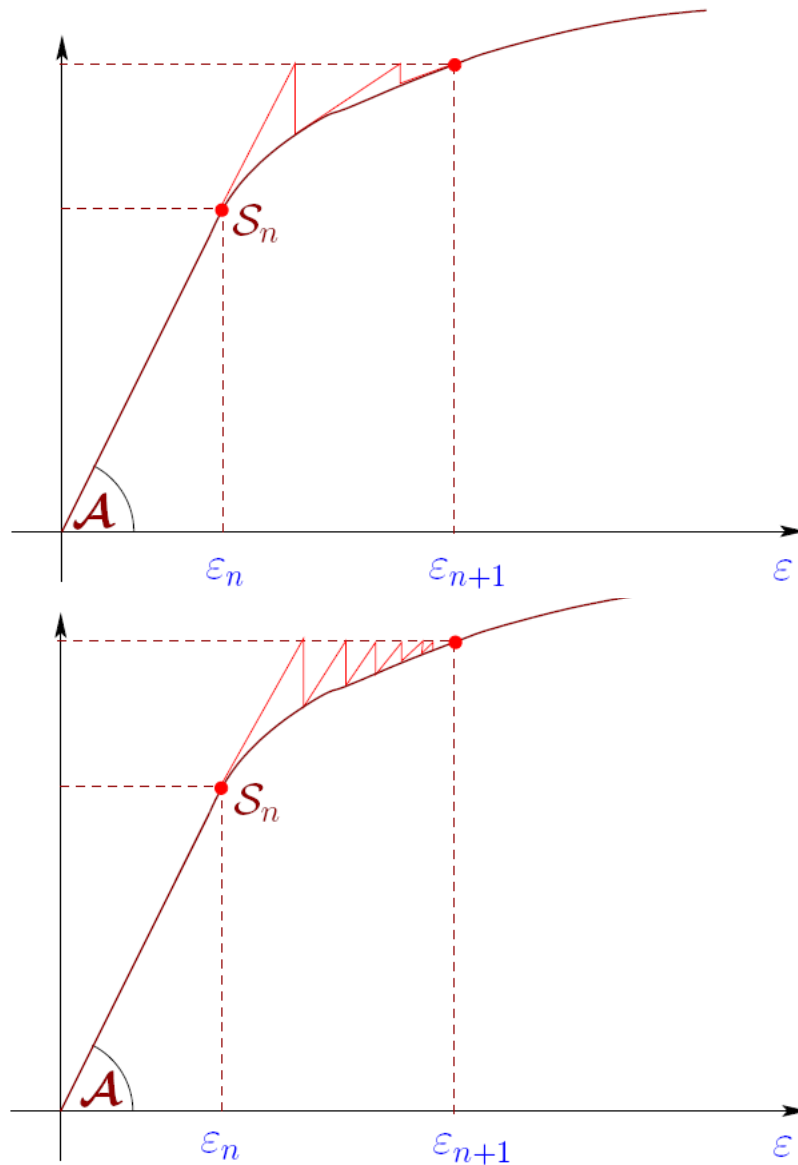
L'opérateur tangent cohérent $[\mathbb{K}^{EP}]$

est remplacé par un opérateur constant $[\hat{\mathbb{K}}]$

Avantage : simplification, réduction du coût CPU par itération

Inconvénient : Plus de convergence quadratique

Interpretation




$[K^{EP}]$ (cohérente)

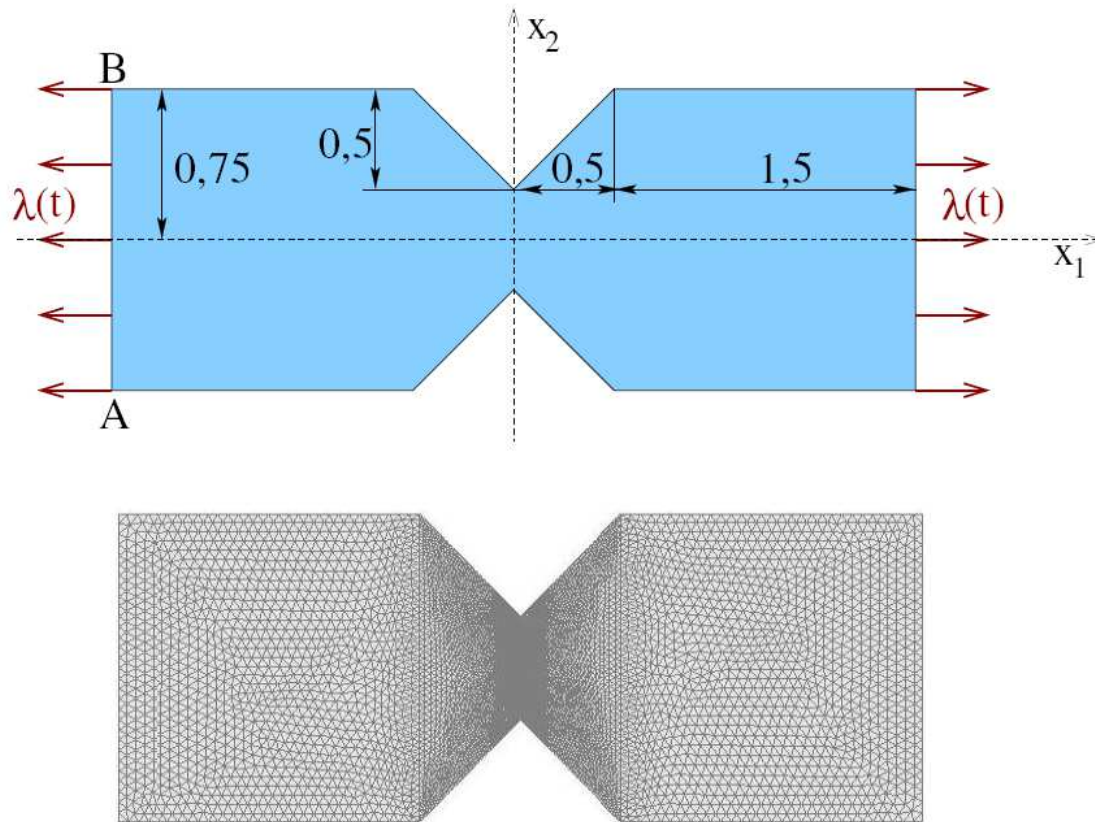
$[\hat{K}]$ (constant)

Chapitre 3

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect globaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent
3. Méthode de Newton avec opérateur tangent constant
4. **Exemples** 

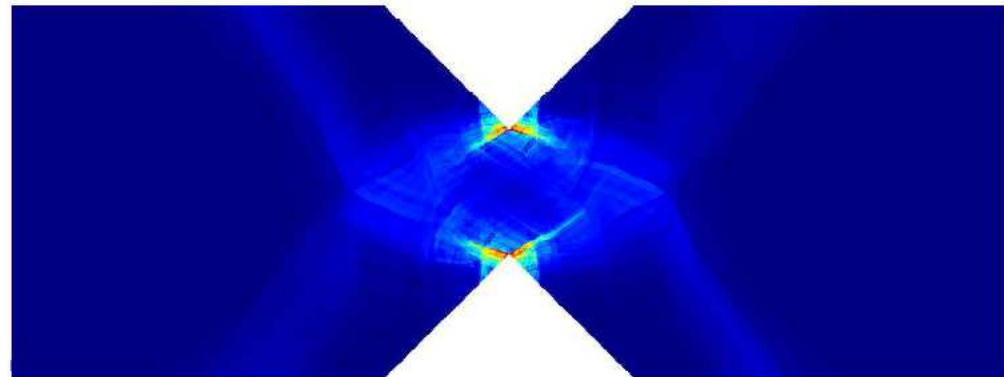
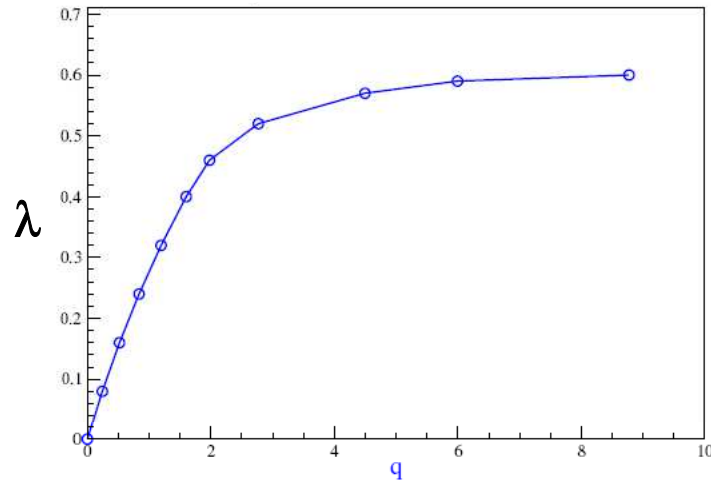
Exemple



- ▶ Plane deformations
- ▶ Mesh : 8792 nodes, 17150 elements
- ▶ Constitutive law :
 $R(p) = \sigma_0 + hp,$
 $\sigma_0 = 0,88E,$
 $\nu = 0,3,$
 $h = 0$ or $h = 0,05E$
- ▶ Constraints :
 $u_1(A) = u_2(A) = u_1(B) = 0$
(rigid body motions)

(i) Elastic perfectly plastic material ($h=0$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,46	0,52	0,57	0,59	0,6



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{EP}]$	1	4	4	4	4	5	6	7	8	8
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}_{n+1}^1]$	1	18	25	40	46	74	120	147	79	190
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$	1	18	44	109	227	380	821	1259	1396	3639

Number of iterations for each time step : Newton method with

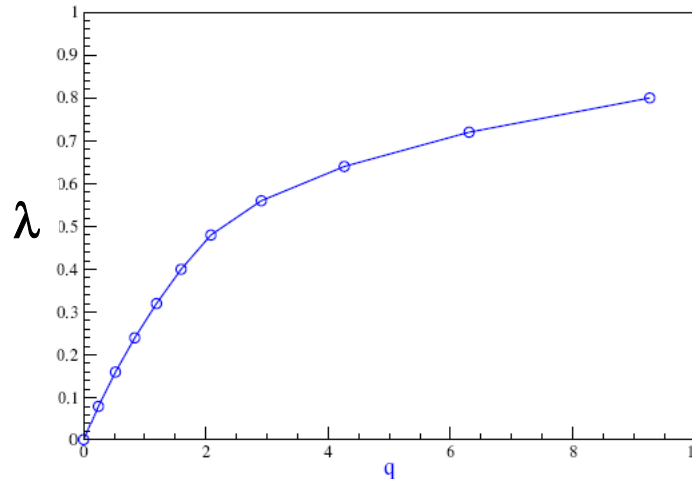
(a) consistent tangent matrix

(b) for every time step use the tangent matrix computed at first iteration

(c) elastic stiffness matrix.

(ii) Elasto-plastic material with isotropic hardening ($h=0.05E$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72	0,8



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a) $[\mathbb{K}^{EP}]$	1	3	3	3	4	5	5	5	5	5
(b) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}_{n+1}^1]$	1	16	18	23	27	40	74	70	44	52
(c) $[\hat{\mathbb{K}}] = [\mathbb{K}]$	1	16	34	54	59	80	102	113	128	147

Number of iterations for each time step : Newton method with

- (a) consistent tangent matrix
- (b) for every time step use the tangent matrix computed at first iteration
- (c) elastic stiffness matrix.

that's all folks