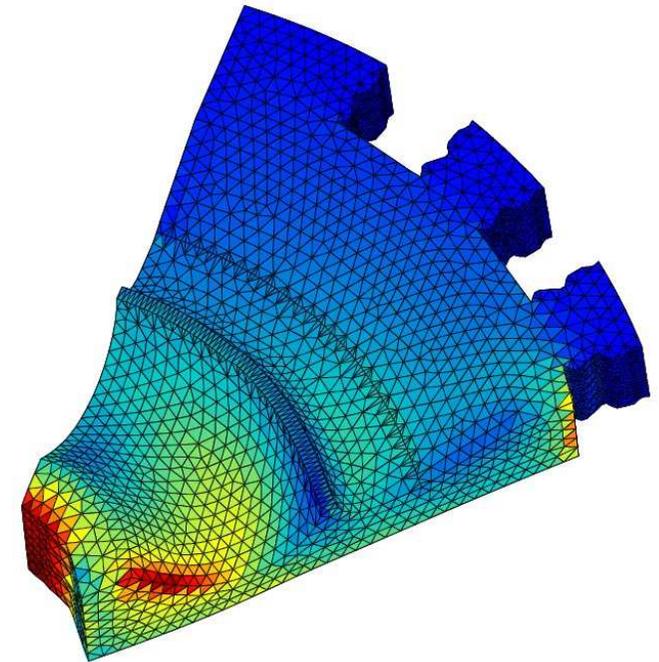
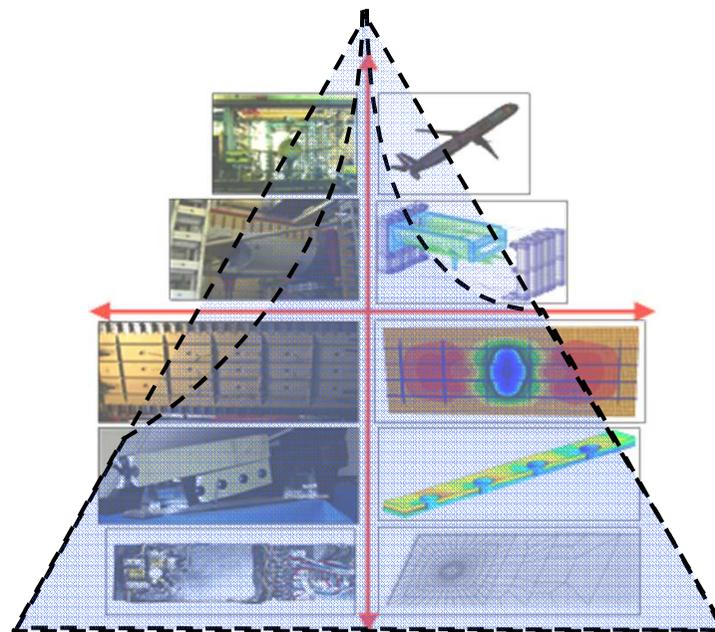
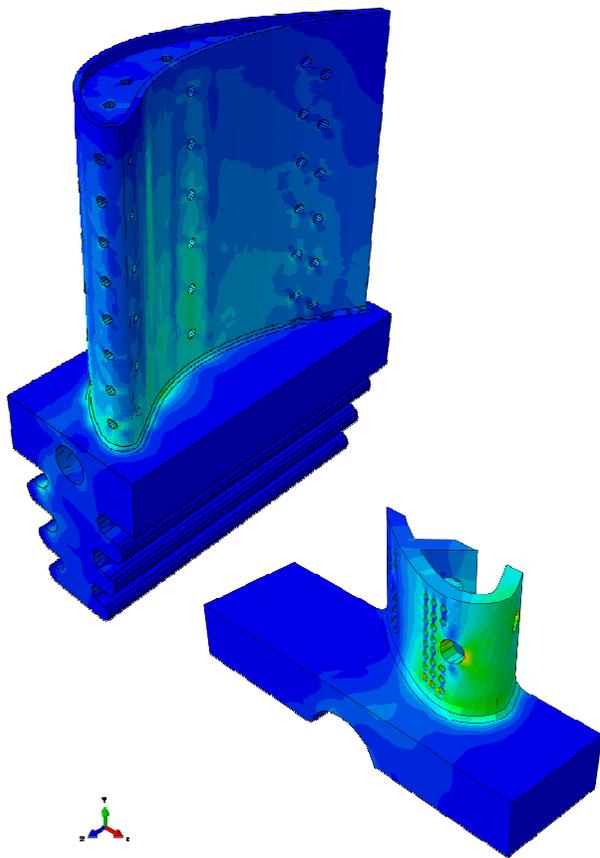


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Frédéric Feyel & Christian Rey

frédéric.feyel@safrangroup.com

christian.rey@safrangroup.com



Plan du cours

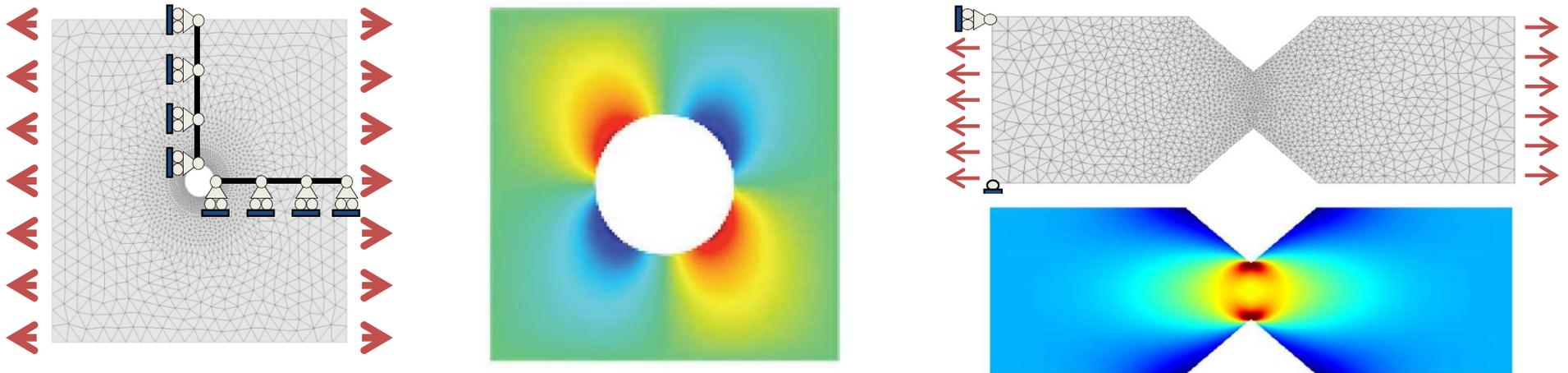
1- Elasticité linéaire – Méthode de Galerkin - Eléments finis isoparamétriques

2- La méthode des éléments finis

3- Introduction aux calculs de structures non-linéaires

4- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux

5- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Octave

Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Plan du cours



1. Introduction
 1. Durée de vie des matériaux et des structures
 2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
 3. Comportement élastoplastique (rappels)

2. Calcul de solides élastoplastiques
 1. Aspects locaux (algorithme de retour radial)
 2. Aspects globaux (Opérateur tangent cohérent)

3. Elasticité en transformations finies : exemple du flambage
 1. Equations de l'élasticité en transformation finies
 2. Déformations infinitésimales – grands déplacements

Durée de vie des matériaux et structures

Avions et fissures. Bien !



Avions et fissures. Pas bien !



**De Havilland
DH 106 Comet**

**10 janvier 1954
35 morts
(Fissuration par fatigue)**

Avions et fissures. Pas bien !



**Boeing 737-300
Southwest Airlines
04 avril 2011**



**Boeing 737-200
Aloa Airlines 243
28 avril 1988**

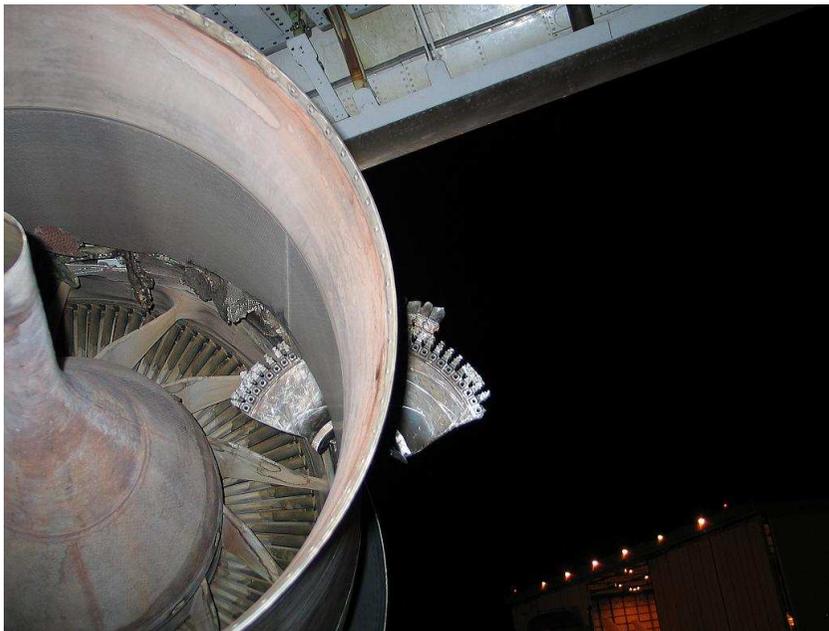
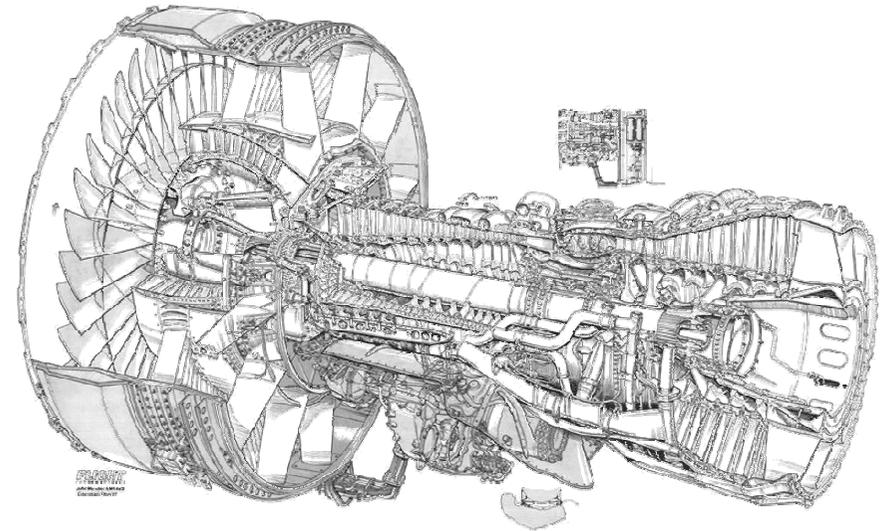
Avions et fissures. Pas bien !



KLAX
02/06/2006
767 - CF6



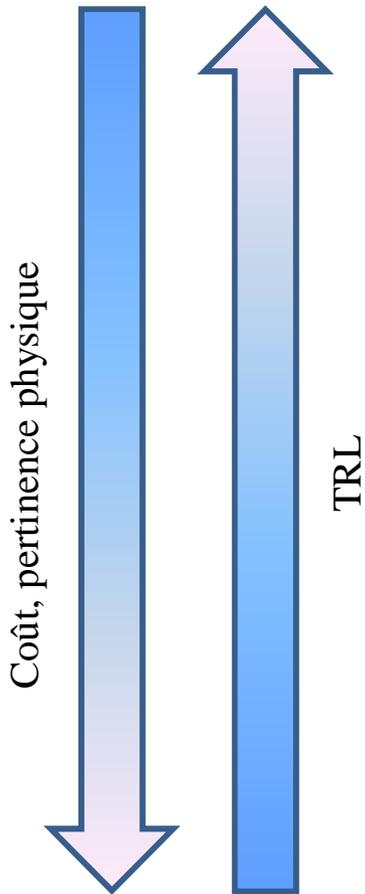
Avions et fissures. Pas bien !



- Pourquoi ?
- Vol AA201 le 02/6/2006 JFK → LAX, sur B767
 - En montée, différence de 2% de poussée entre les deux moteurs
 - Atterrissage à LAX, débarquement des passagers
 - L'avion est parké en zone éloignée
 - Essais moteurs à pleine puissance et au régime de croisière

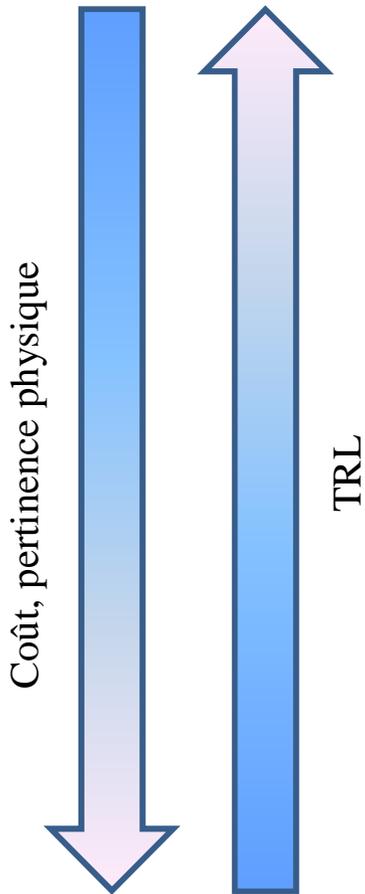
- Durée de vie, endommagement, rupture : enjeux importants
 - ... en dimensionnement
 - ... en suivi de flotte
 - ... en analyse de crise
 - ...
- Dimensionner au plus juste
 - de la matière...
 - ...mais pas trop

Trois niveaux de modélisation



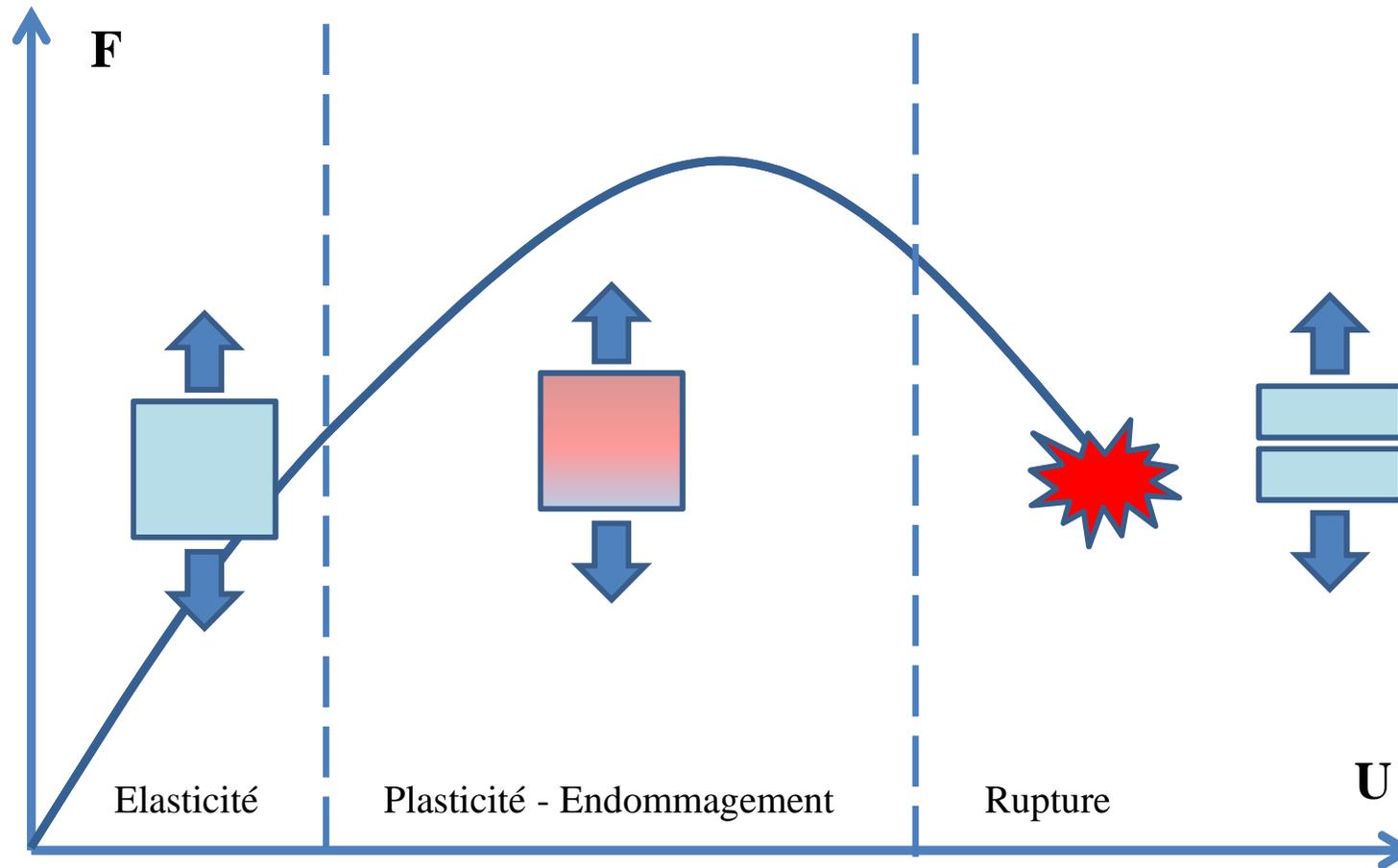
- Niveau 0
 - Notion de « barreau équivalent », approche 1D, purement phénoménologique
- Niveau 1
 - Approches énergétiques globales
- Niveau 2
 - Approche locale, prise en compte fine du matériau

Trois niveaux de modélisation



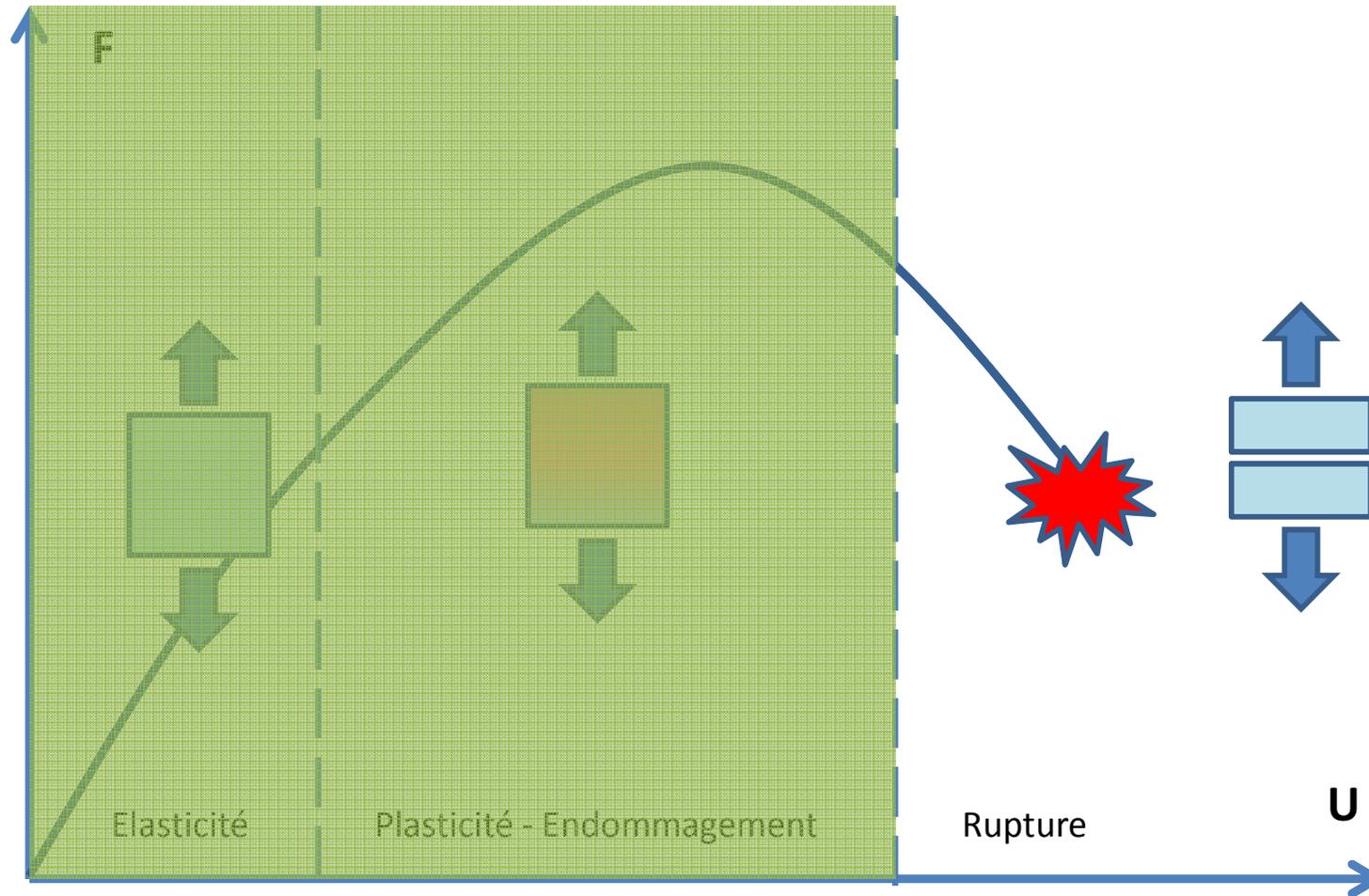
- Niveau 0
 - Notion de « barreau équivalent », approche 1D, purement phénoménologique
- Niveau 1
 - Approches énergétiques globales
- Niveau 2
 - Approche locale, prise en compte fine du matériau

Un modèle SIMPLE : traction

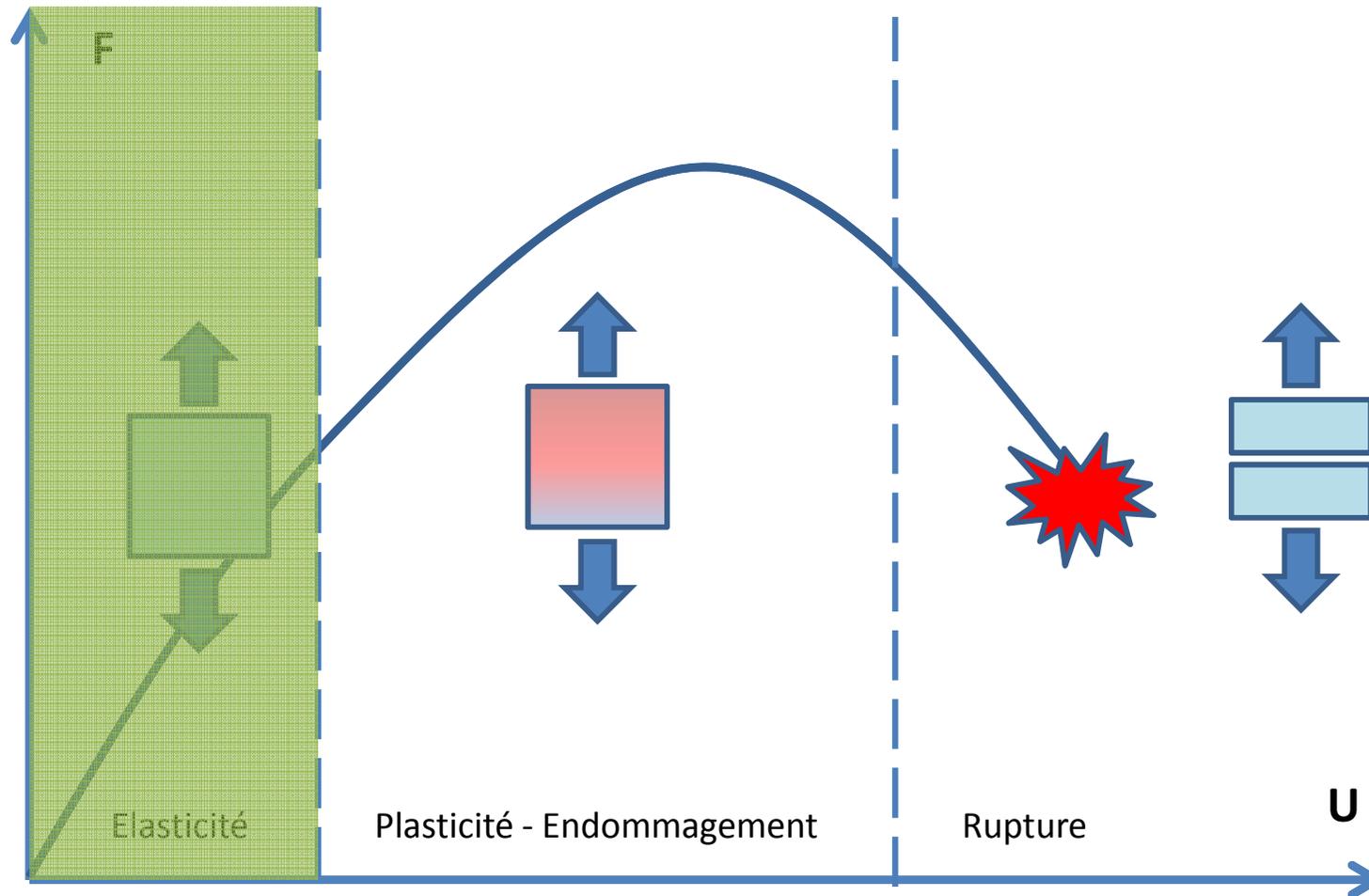


- Modèle très simplifié, « pour les idées »
- Non linéarités, chargements alternés, cycliques,...

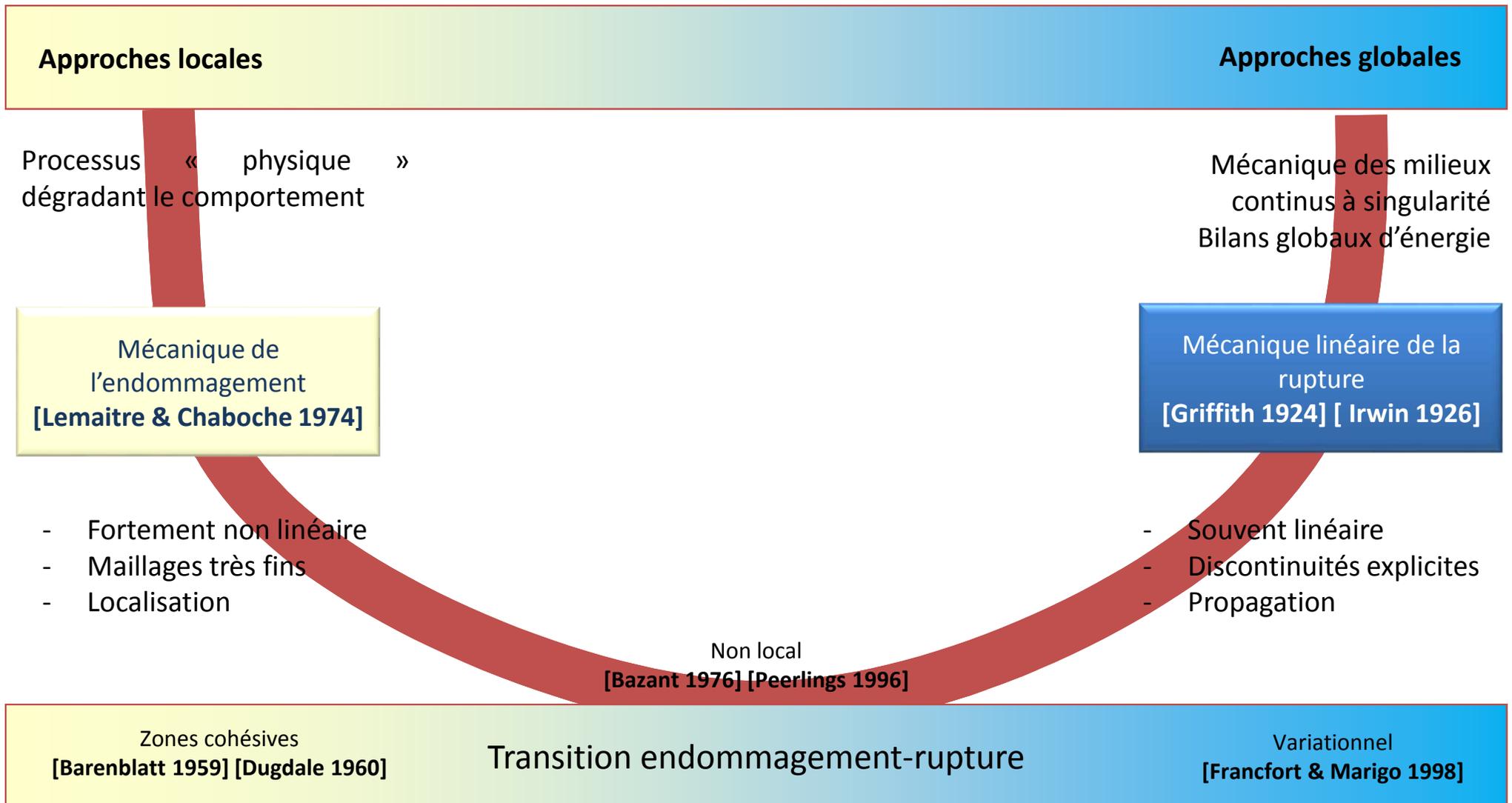
Approches globales

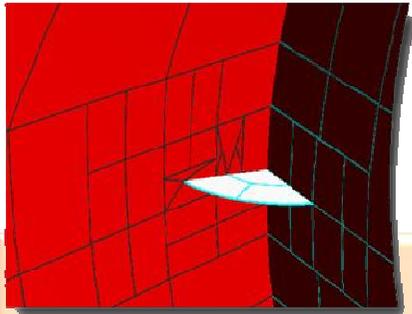


Approches LOCALES

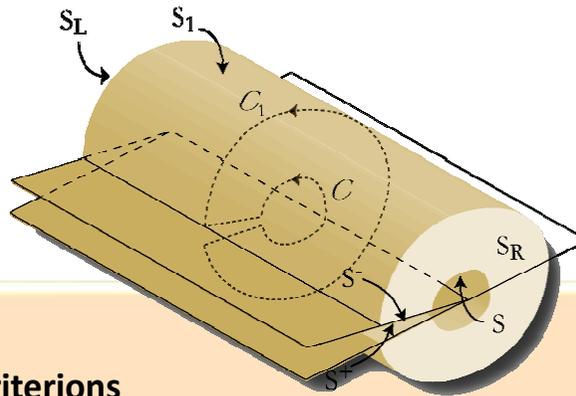


Approches locales vs. globales





← Finite element



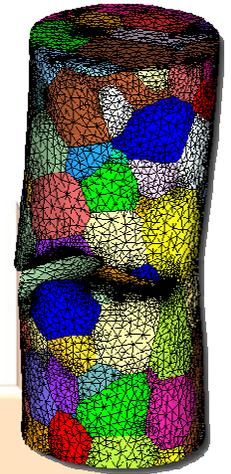
Branching criteria

Barsoum

Meshless

XFEM – PUM - Levelsets

Robust 3D meshing - conform



1960

1970

1980

1990

2000

2010

Rice integral

Damage mechanics

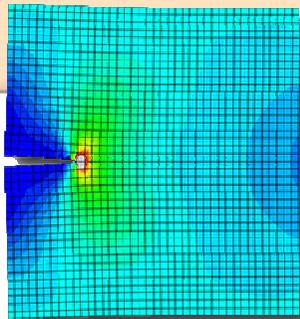
3D meshers

Cohesive models

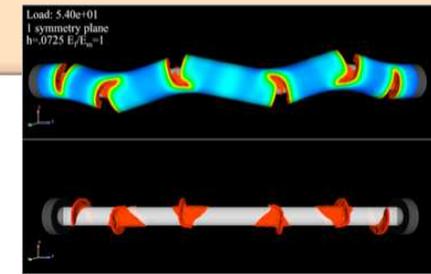
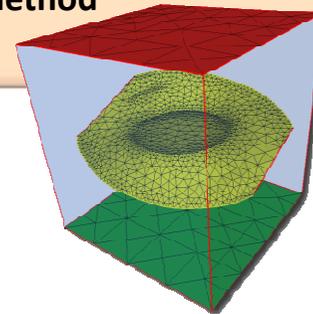
Lorenzi integral

Non local

Variational fracture



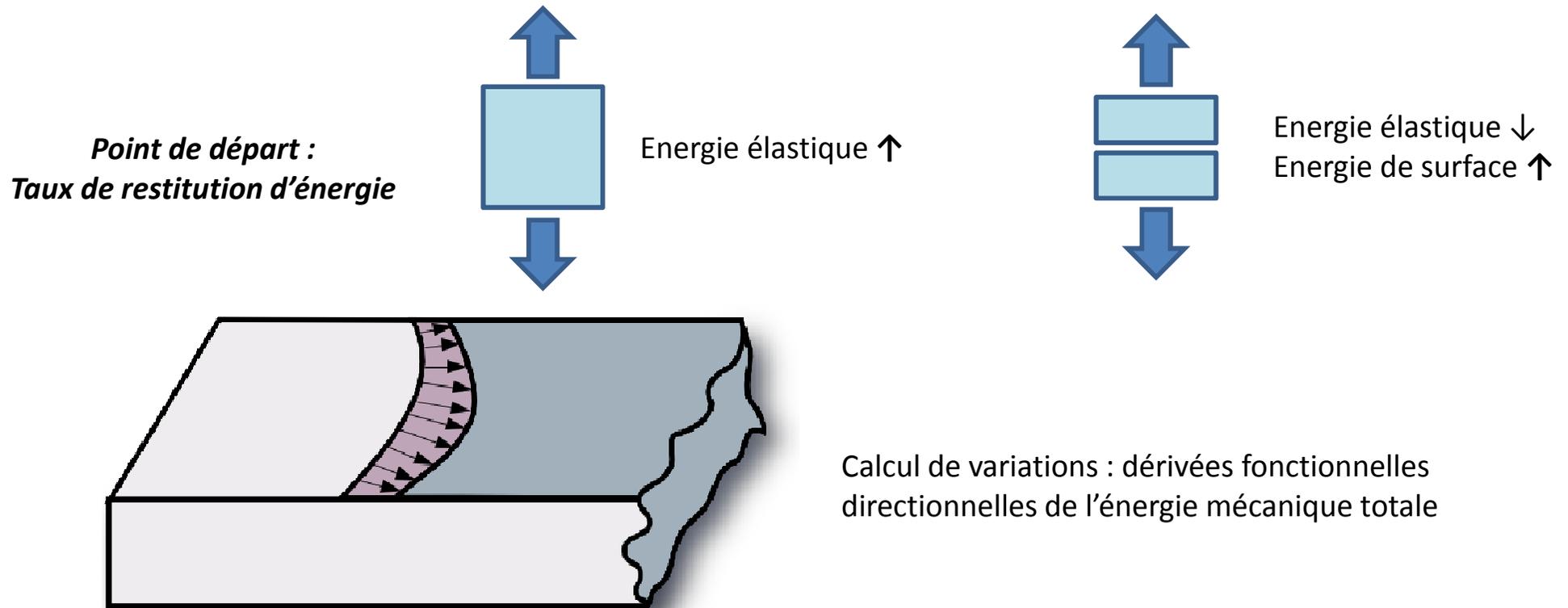
G-t method



- Ces approches supposent la maîtrise
 - des développements théoriques
 - des technologies de maillage / fissure
- Approches implantées dans la suite logicielle Zset
- Ouvert → plateforme recherche
- Robuste → utilisation industrielle / semi-industrielle
- Coopération ONERA - ENSMP



Approches globales : BILAN d'ENERGIE



[Griffith 1924]

[Irwin 1926]

[Dugdale 1960]

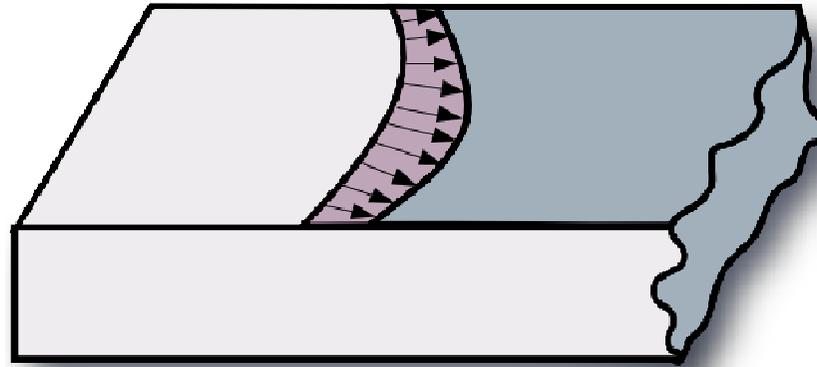
[Barrenblatt 1959]

Mécanique linéaire de la rupture

Approches cohésives

[Francfort, Marigo 1998]

Approches globales



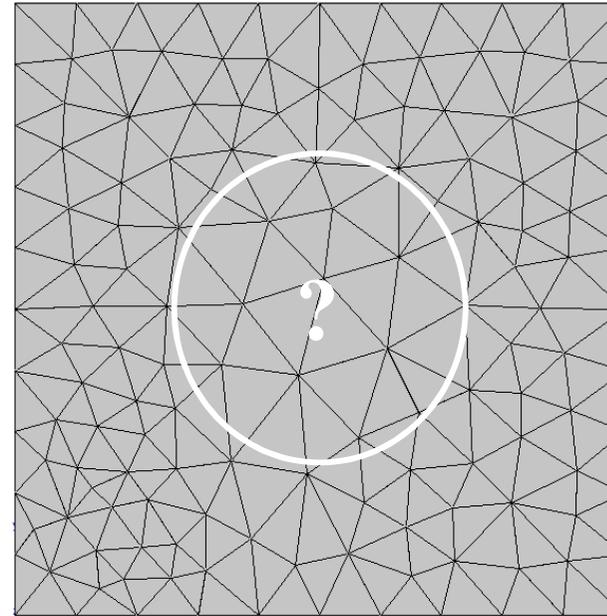
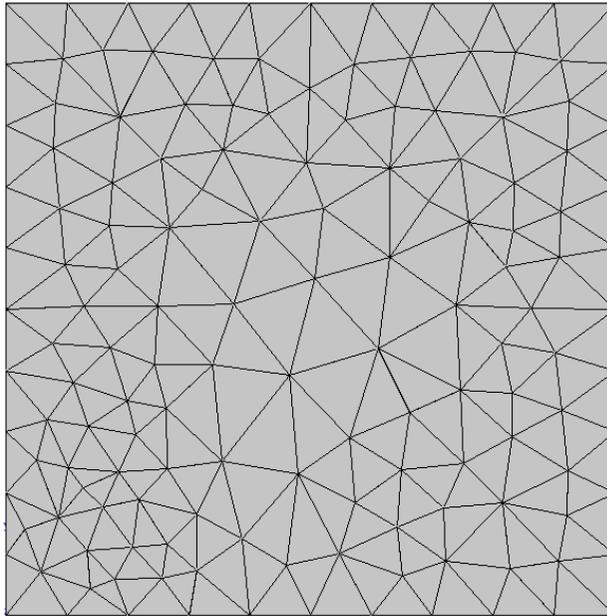
- Minimisation de l'énergie totale (implicite)
- Modèle phénoménologique de propagation de fissure (explicite)
- Nécessite une fissure pré-existante
- Ne peut pas traiter l'amorçage

$$\min_a E(a)$$

$$\dot{a} = F(\Delta K, \dots)$$

IMPLICITE vs. CONFORME

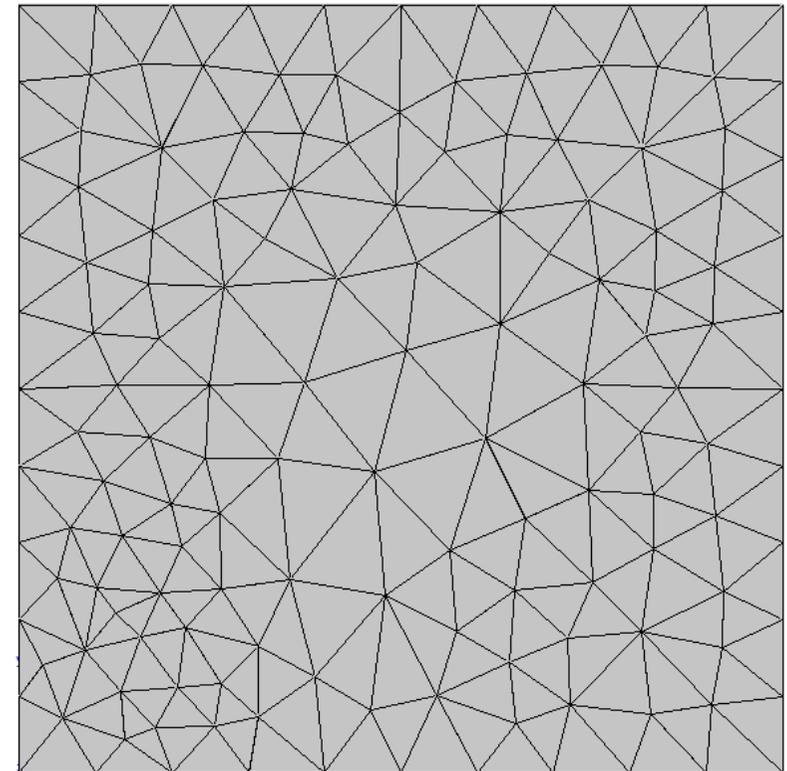
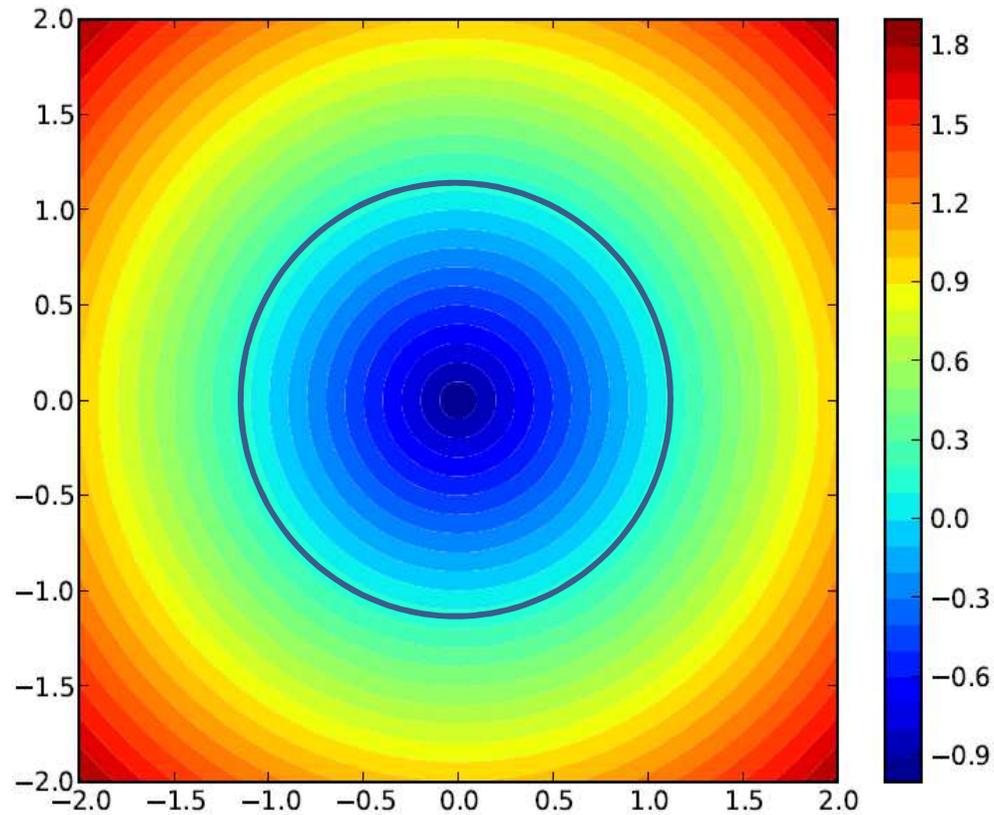
- D'une manière ou d'une autre, il s'agit d'insérer des fissures dans un maillage



- Deux voies possibles :
 - Implicite : le lieu de la fissure est décrit comme l'iso zéro d'une fonction implicite → PUM / XFEM
 - Explicite : on coupe le maillage, et on remaille

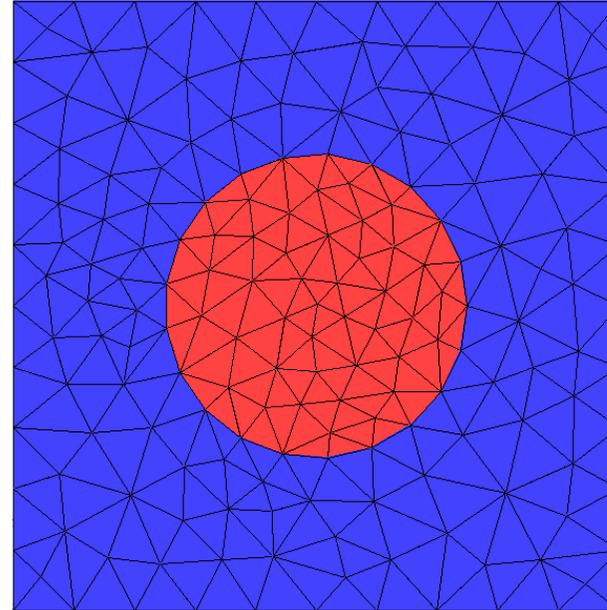
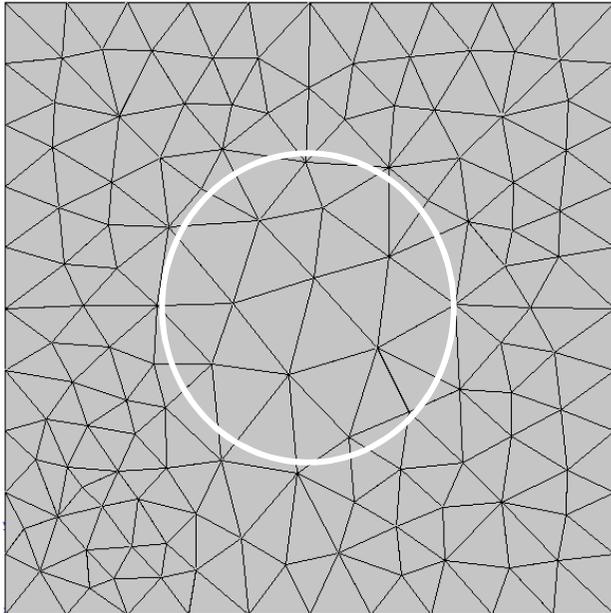
Implicite (LEVELSET)

[Osher & Sethian]



→ Evolution : Hamilton-Jacobi

CONFORME



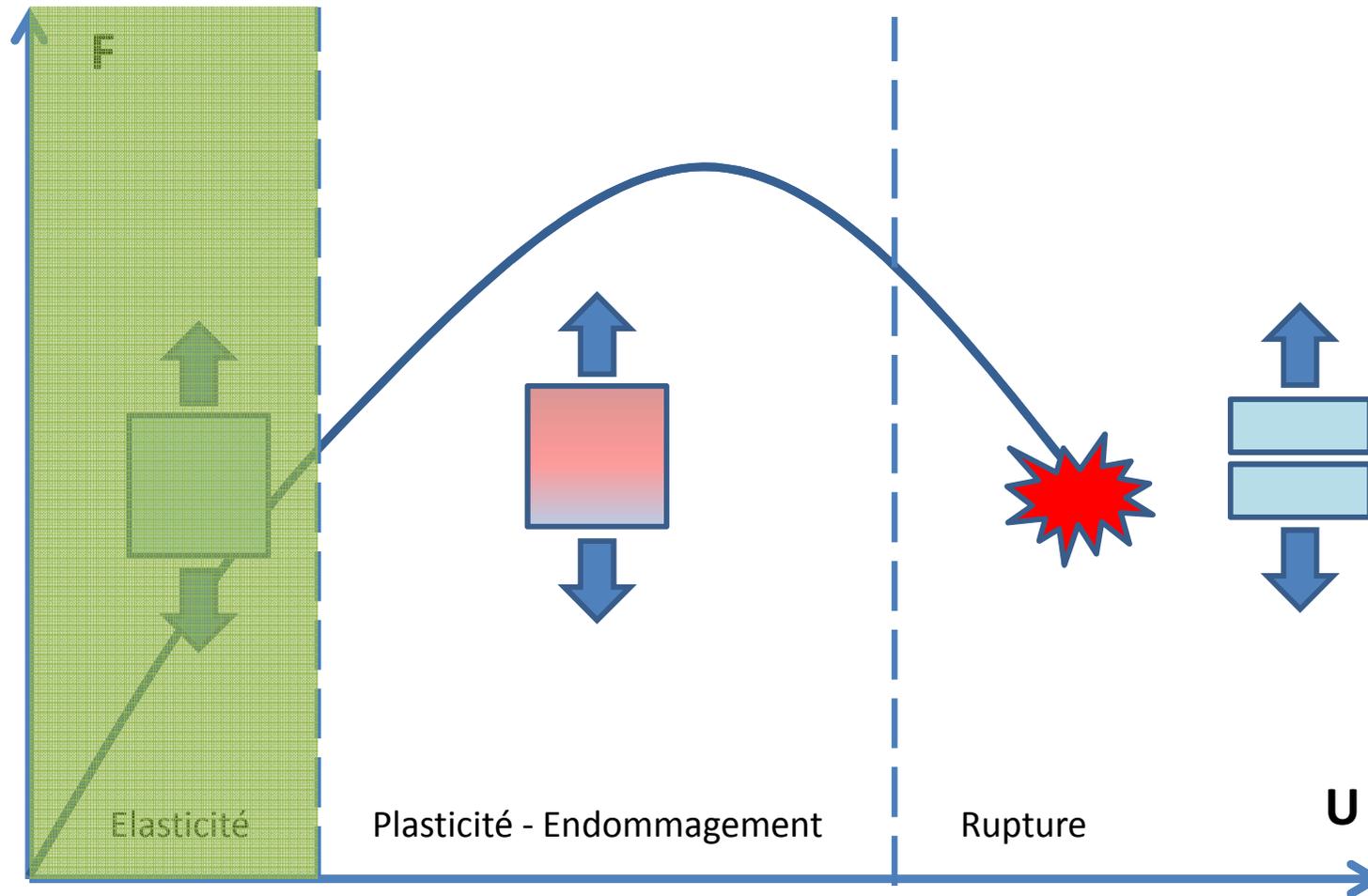
- Simple à comprendre (et à coder) en 2D, un peu (!) plus subtil en 3D [Chiaruttini]
- Evolution : succession de remaillages



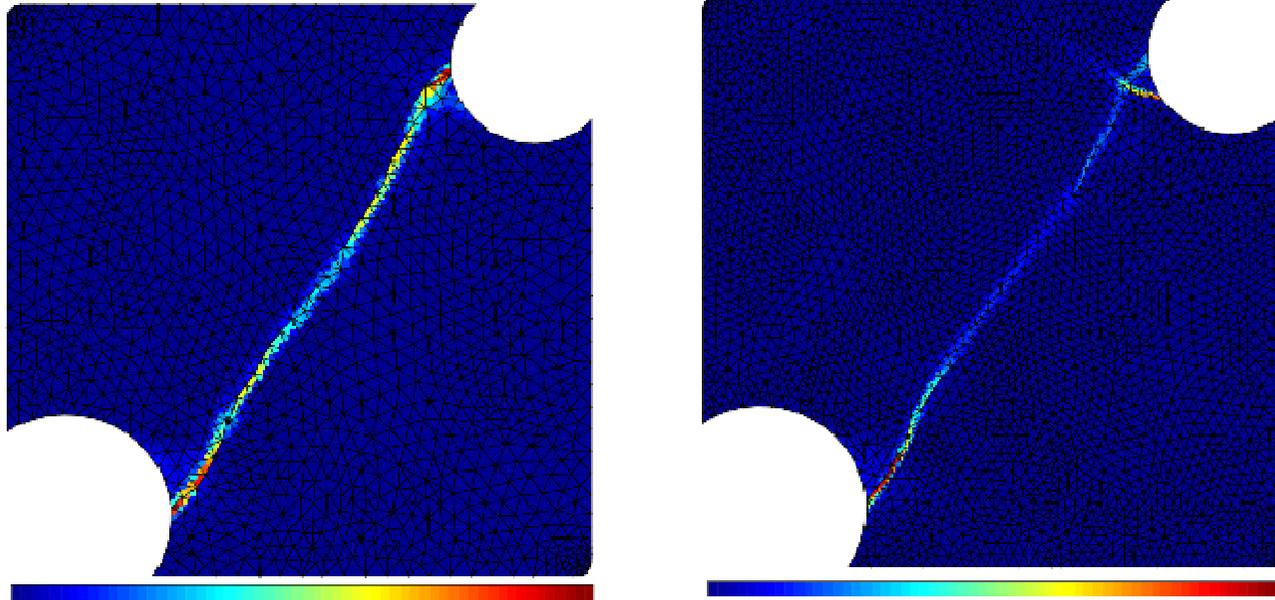
**3D crack growth simulation
in a turbine blade under fatigue loading**

Courtesy of V. Chiaruttini (ONERA)

Approches locales



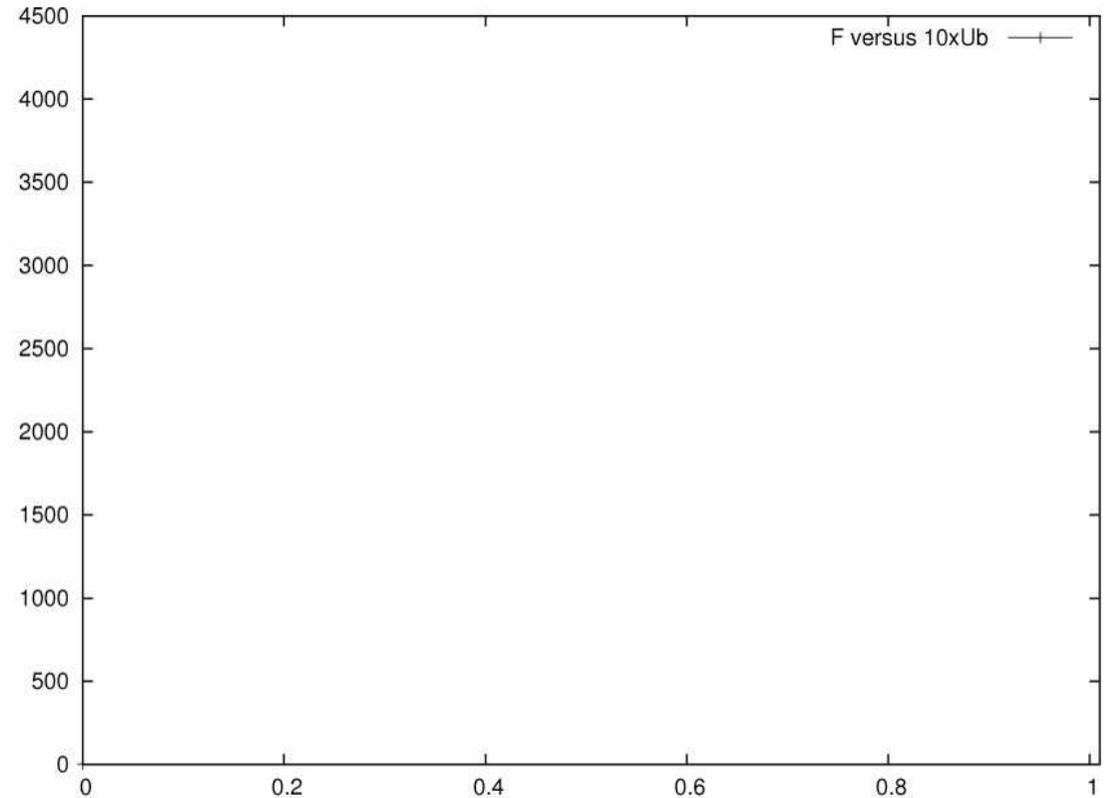
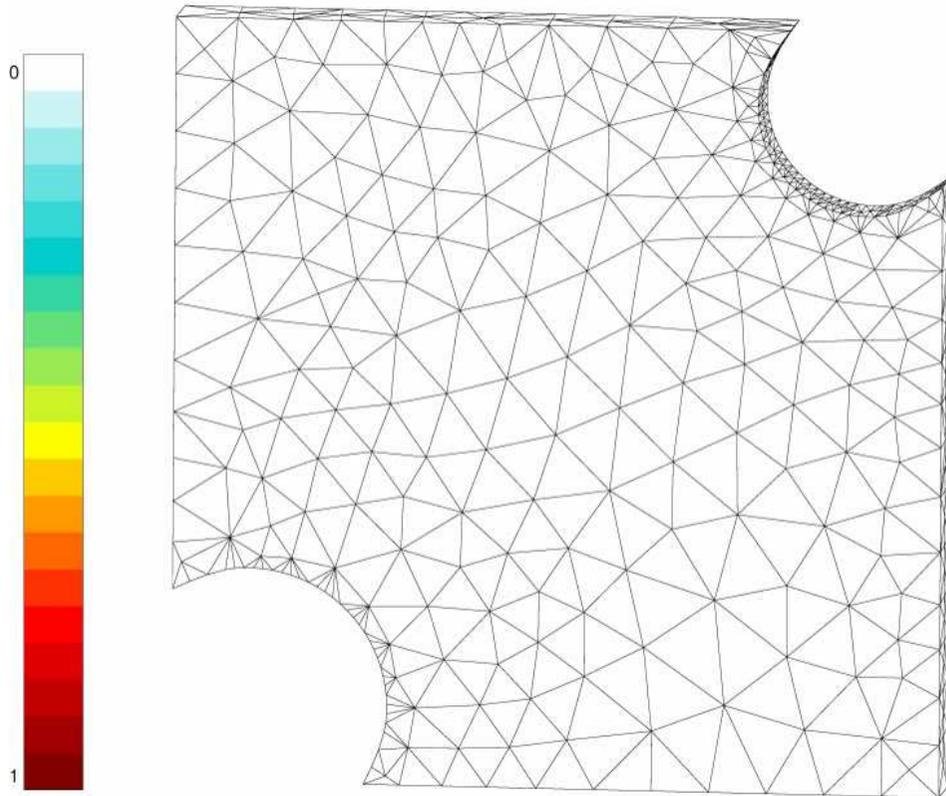
Numériquement difficile !



- Contrôle de la localisation : interaction entre points matériels
- Maîtrise des couts et robustesse : adaptation de maillage

[Lemaître, Chaboche 1974] [Bazant 1976] [Peerlings 1996]

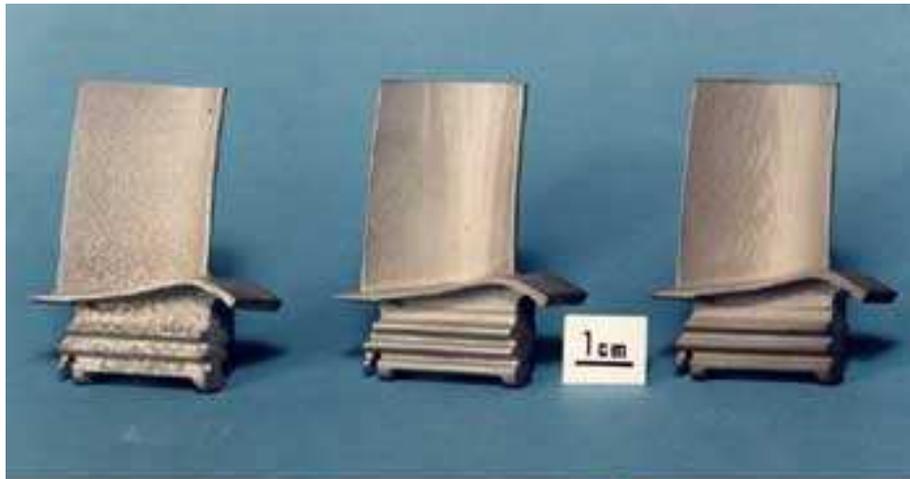
Les balbutiements: TRL1



Courtesy of S. Feld-Payet (ONERA)

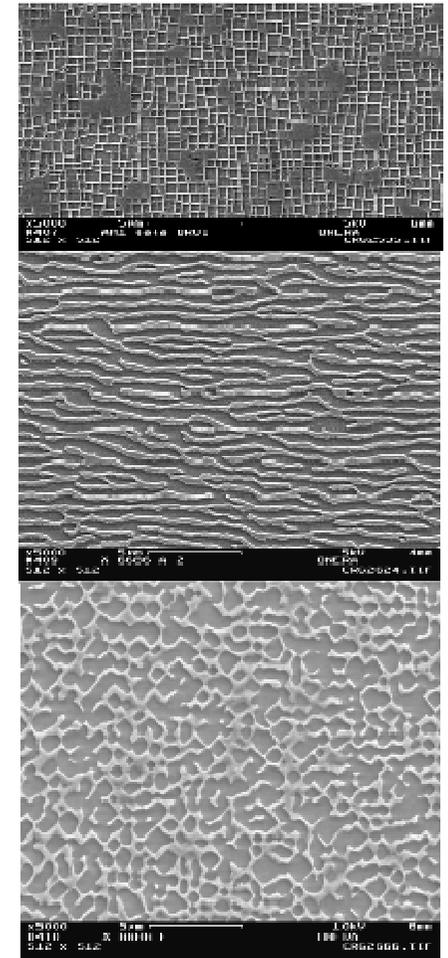
N'oublions pas le matériau !

- Dépendance forte au matériau
 - Tous ces modèles numériques sont sans intérêt sans prise en compte fine du matériau



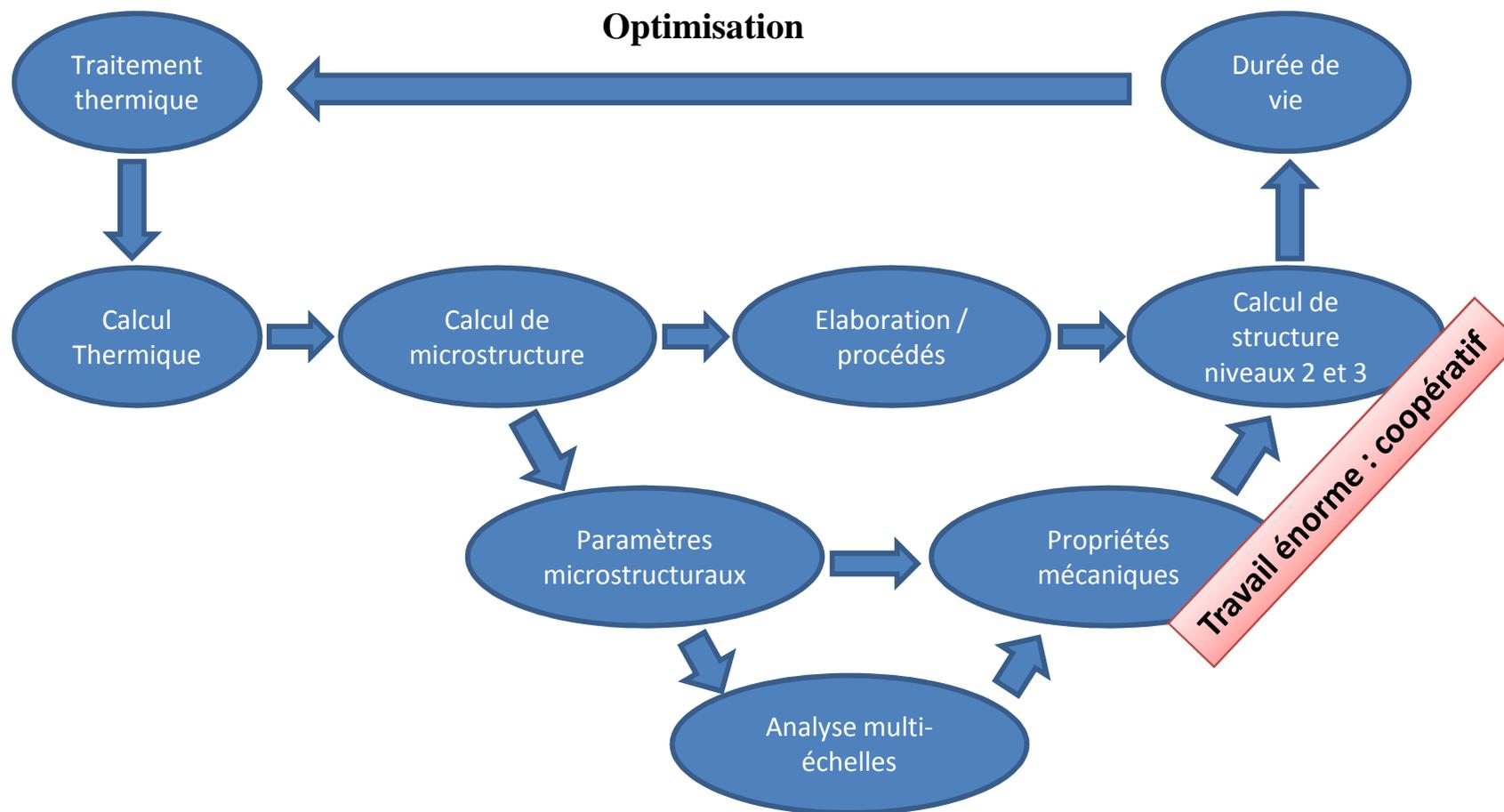
**Effet de la
microstructure
initiale, fabrication**

Evolution en service



À (très) long terme...

- *Materials & structures by design* : une boucle de modélisation complète, du matériau à la structure et vice-versa



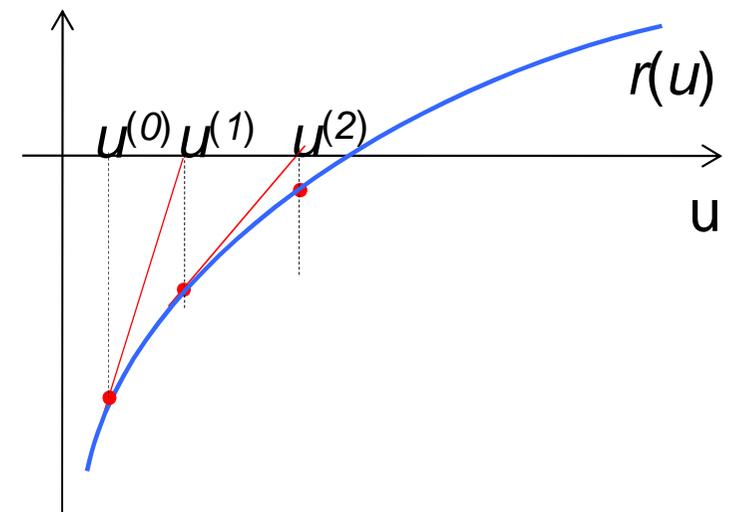
1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires



Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires

(exemple en élasticité non linéaire)

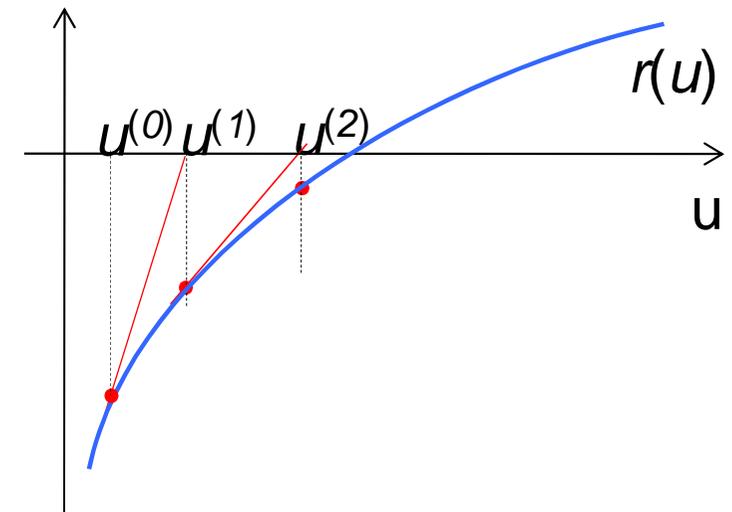


3. Comportement élastoplastique (rappels)

1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires

Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires
(exemple en élasticité non linéaire)



3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas équation scalaire non linéaire

Trouver u tel que $r(u)=0$

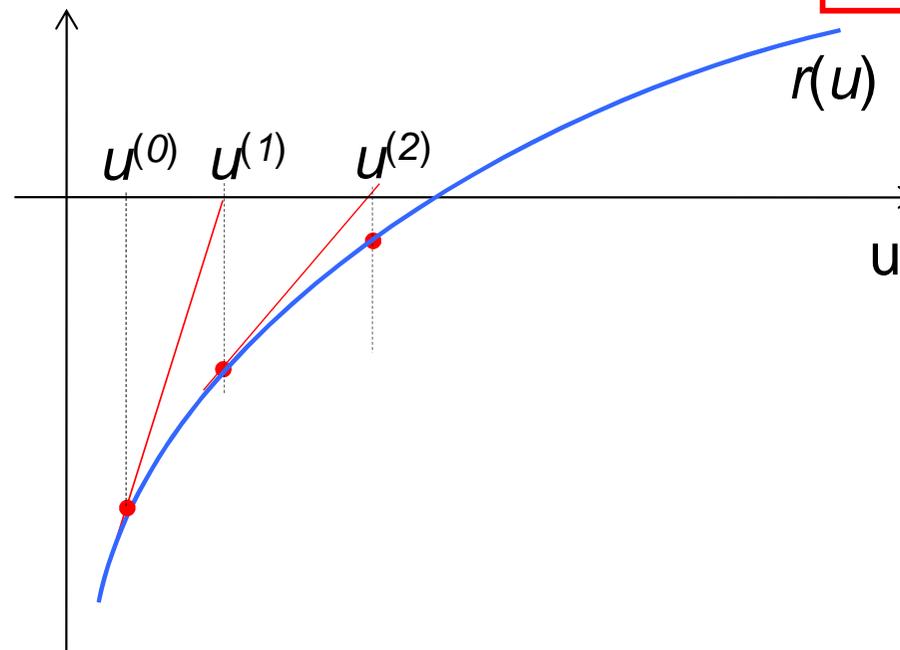
Procédure itérative : construction d'une séquence $u^{(k)} \rightarrow u$ tel que $r(u)=0$

Méthode de Newton-Raphson:

Développement limité au premier ordre de $r(u^{(k+1)})$ autour de $u^{(k)}$

Puis résolution du problème linéaire associé

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]r'(u^{(k)}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$



L'algorithme de Newton-Raphson

Initialisation : $u^{(0)}$ (par exemple $u^{(0)} = 0$)

Calcul du Résidu : $r(u^{(0)})$

Itération : $k \rightarrow k+1$

Résoudre : $\delta u^{(k)} = - [r'(u^{(k)})]^{-1} r(u^{(k)})$

Actualisation : $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \delta u^{(k)}$

Calcul résidu : $r(u^{(k+1)})$

Test de convergence : Si $|r(u^{(k+1)})| < \varepsilon r(u^{(0)}) \implies \text{fin}$

Typiquement : $\varepsilon = 10^{-6}$

Convergence quadratique de l'algo. Newton-Raphson

Soit $e^{(k)} = u^{(k)} - u$ (erreur / solution) pour tout k , on a:

$$e^{(k+1)} - e^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)} = -\frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$

Développement limité de $r(u^{(k)})$ et $r'(u^{(k)})$ autour de la solution exacte u

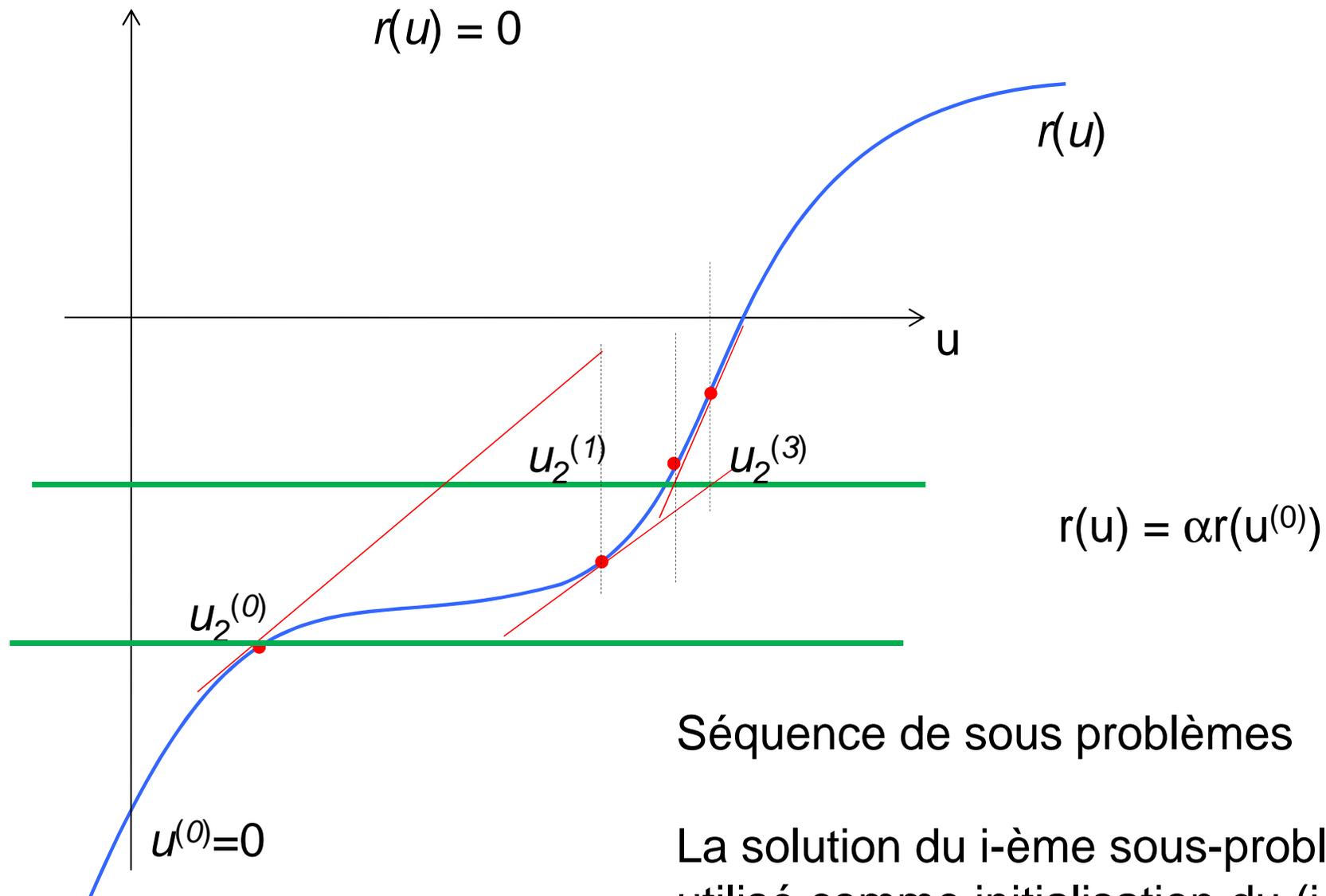
$$\exists \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \longrightarrow \quad r(u^{(k)}) = r'(u)e^{(k)} + \frac{1}{2}r''(u + \alpha e^{(k)})(e^{(k)})^2$$

$$\exists \beta, 0 \leq \beta \leq 1 \quad \longrightarrow \quad r'(u^{(k)}) = r'(u) + r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}$$

$$e^{(k+1)} = \frac{2r''(u + \beta e^{(k)}) - r''(u + \alpha e^{(k)})}{2r'(u) + 2r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}} (e^{(k)})^2 = O(|e^{(k)}|^2)$$

Algorithme de Newton-Raphson : Convergence quadratique
(au voisinage de la solution)

Convergence de l'algorithme de Newton-Raphson



Séquence de sous problèmes

La solution du i -ème sous-problème est utilisé comme initialisation du $(i+1)$ ème sous-problème

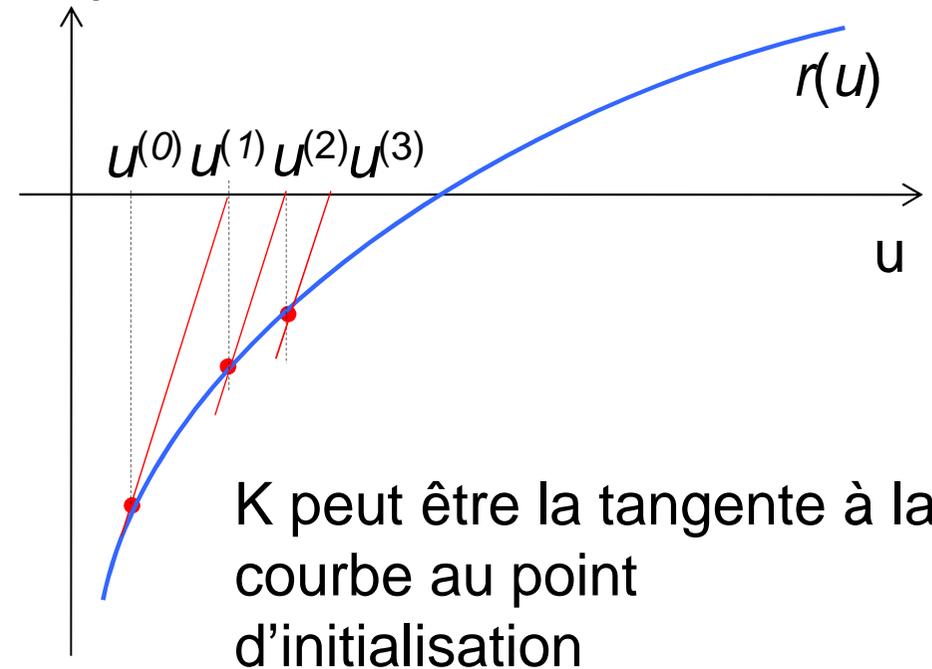
Newton-Raphson Modifié - 1

$r'(u)$ est remplacé par une constante K , ce qui donne

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]K = 0$$

i.e.

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{K}$$



La convergence est seulement linéaire (proche de la solution)

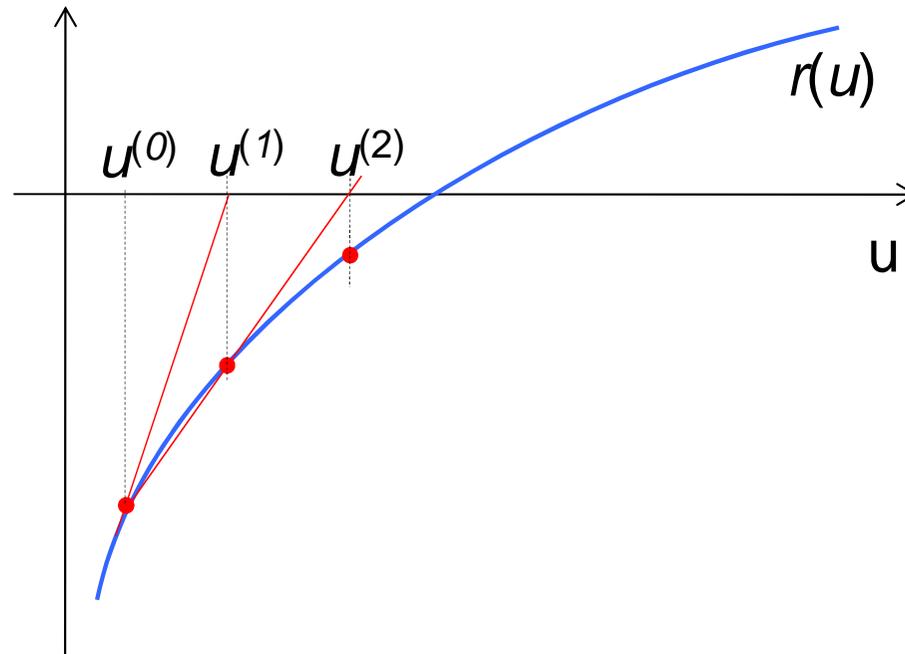
$$e^{(k+1)} = \left(1 - \frac{r'(u)}{K}\right)e^{(k)} + o(|e^{(k)}|) = O(|e^{(k)}|)$$

Not interesting in the scalar case $r(u) = 0$;

Extension to the vector case $\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = \{0\}$ sometimes useful.

Newton-Raphson Modifié - 2

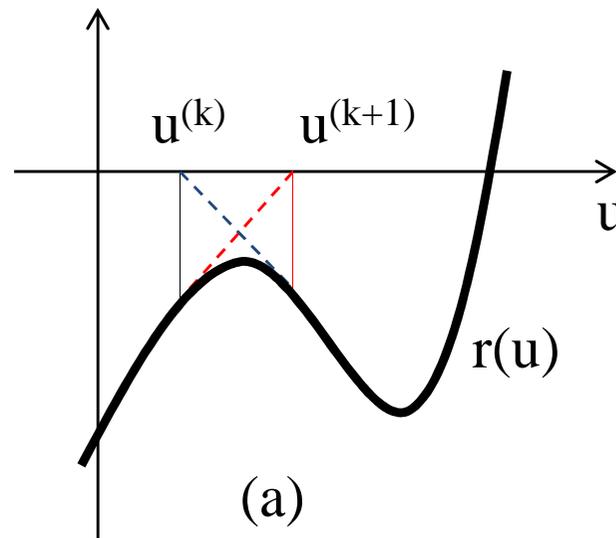
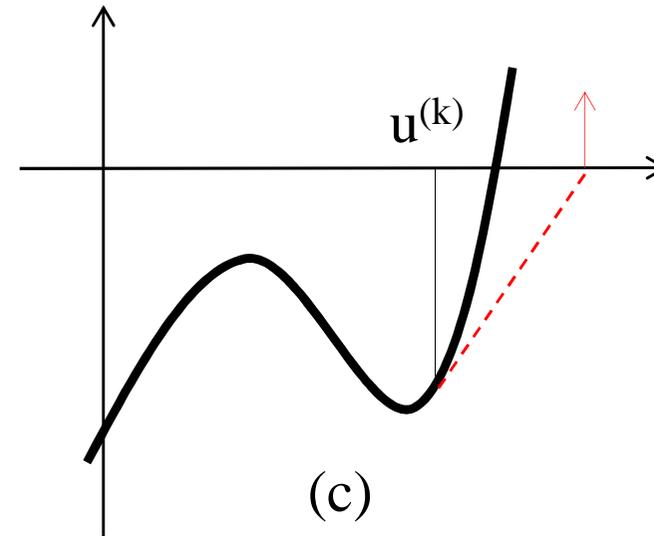
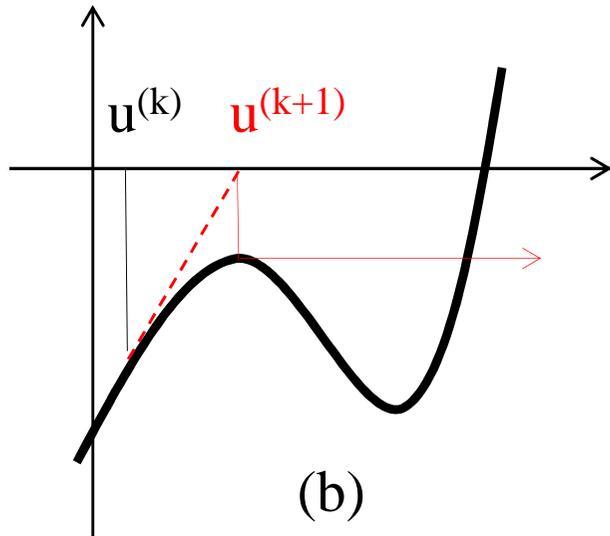
Opérateur sécant (Employ line segment passing through the two previous estimates)



$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}] \frac{r(u^{(k)}) - r(u^{(k-1)})}{u^{(k)} - u^{(k-1)}} = 0$$

It can be shown that $|e^{(k+1)}| = O(|e^{(k)}|^{(1+\sqrt{5})/2})$: slower convergence than with standard Newton method, but faster than with modified Newton approach 1. $(1 + \sqrt{5})/2$ is the golden number...

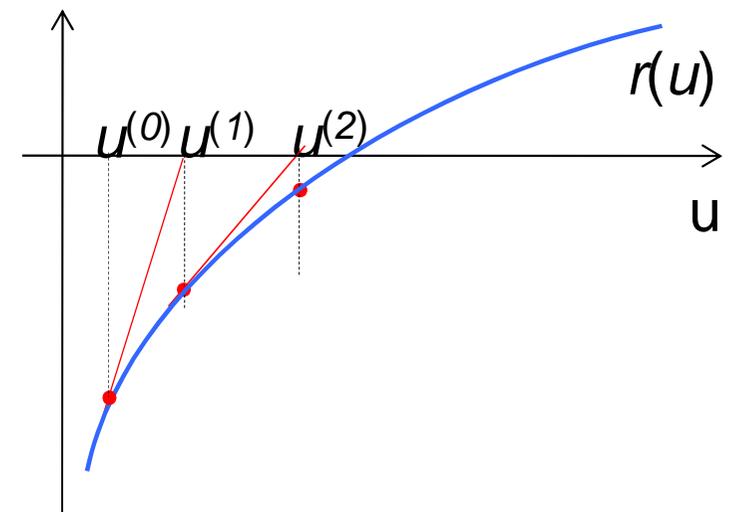
Cas de divergence de Newton-Raphson



1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires

Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires
(exemple en élasticité non linéaire)



3. Comportement élastoplastique (rappels)

Elasticité non linéaire - HPP

Comportement élastique non linéaire :
 $\phi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ (densité d'énergie libre, convexe)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

*Forme générique;
Non linéaire en
général*

➤ Forme faible des équations (PPV)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}]) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{v}}] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{v}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{v}} d\Gamma = 0 \quad \forall \underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$$

➤ Compatibilité géométrique + loi de comportement == > **equations non linéaires**

$$\text{Trouver } \underline{\underline{u}} \in C(\underline{\underline{U}}^D) \text{ tel que } R(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{v}}) = 0 \quad \forall \underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$$

avec le résidu défini par :

$$R(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{v}}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}([\underline{\underline{u}}])) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{v}}] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{v}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{v}} d\Gamma$$

➤ **Objectif de la résolution itérative :**

construire une séquence $\underline{\underline{u}}^{(k)}$ qui converge vers la solution $\underline{\underline{u}}$ de $R(\underline{\underline{u}}; \cdot) = 0$

➤ **Interpolation EF** de $\underline{\underline{u}} \in C(\underline{\underline{U}}^D)$ et $\underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$

== > système d'équations non linéaires

Elasticité non linéaire – Méthode de Newton-Raphson

$$\text{Trouver } \underline{u} \in C(\underline{U}^D) \text{ tel que } R(\underline{u}; \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$$

- Application linéaire tangente R' de R

$$R(\underline{v} + \underline{z}; \underline{w}) - R(\underline{v}; \underline{w}) = \langle R'(\underline{v}; \underline{w}), \underline{z} \rangle + o(\|\underline{z}\|)$$

- Méthode de Newton (pb continu)

Partant de l'estimation $\underline{u}^{(k)}$ trouver $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$ avec $\delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0})$

Linéarisation autour de $\underline{u}^{(k)}$

$$R(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) \approx R(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \langle R'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = 0$$

L'estimation $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$ est alors solution du problème **linéaire** :

$$\text{Trouver } \delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0}) \text{ tel que } \langle R'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = -R(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) \quad (\forall \underline{w} \in C(\underline{0}))$$

Elasticité non linéaire – Application linéaire tangente

$$\mathcal{R}(\underline{u}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

Linéarisation des contraintes w.r.t. $\delta \underline{u}^{(k)}$ $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$

$$\sigma_{ij}[\underline{u}^{(k+1)}] = \sigma_{ij}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ml}}[\underline{u}^{(k)}] \delta \varepsilon_{ml}^{(k)}$$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$

$$\sigma_{ij}[\underline{u}^{(k+1)}] = \sigma_{ij}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] = \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$



$\mathcal{A}^{(k)}$

$$\mathcal{A}_{ijml}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ml}}[\underline{u}^{(k)}]$$

Pour un $\underline{u}^{(k)}$ donné
Les composantes du
tenseur découle de la
La loi de comportement

Elasticité non linéaire – Application linéaire tangente

➤ Résidu à l'itération : $k+1$

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

➤ Développement limité de $\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}]$ autour de $\underline{u}^{(k)}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] = \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] + \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

➤ Développement limité de $\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w})$ autour de $\underline{u}^{(k)}$:

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) = \mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

Pour un $\underline{u}^{(k)} \in C(\underline{U}^D)$ donné, trouver $\delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0})$ tel que, $\forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] d\Omega + \mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}, \underline{w}) = 0$$

Elasticité non linéaire – Approximation Elément Finis

➤ Approximation EF

$$\implies \Omega_h, \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D), \delta \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{0}), \underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$$

➤ Résidu discret défini par

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}[\underline{u}_h^{(k)}]) \right) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

➤ Matrice de rigidité tangente définie par

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV$$

➤ La correction $\{\delta \mathbb{U}^{(k)}\}$ est solution du problème linéaire tangent

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

Quelques remarques sur le calcul des intégrales

Matrice de rigidité tangente définie par

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{\underline{u}}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV$$

$$= \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{\underline{u}}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV$$

$$\{\varepsilon[\underline{\underline{w}}](\underline{\underline{x}})\} = [B_e(\underline{\underline{a}})] \{\mathbb{W}_e\}$$

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \left(\sum_{g=1}^{n_g} [B_e(\underline{\underline{a}}_g)]^T [A^{(k)}(\underline{\underline{a}}_g)] [B_e(\underline{\underline{a}}_g)] w_g \right) \{\delta \mathbb{U}_e^{(k)}\}$$

La loi de comportement est imposée seulement aux Points de Gauss !

Résolution d'un système d'équations non linéaire par l'algorithme de Newton-Raphson

- 1 Initialization : $\{\mathbf{U}^{(0)}\}$ (often, $\{\mathbf{U}^{(0)}\} = \{0\}$),
Compute initial residuum $\{\mathbf{R}^{(0)}\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)})\}$
- 2 For $k = 0, 1, \dots$ repeat :
 - (i) Compute $[\mathbf{K}^{(k)}]$ (tangent stiffness matrix);
 - (ii) $\{\mathbf{U}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{U}^{(k)}\} + [\mathbf{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbf{R}^{(k)}\}$ (new estimate);
 - (iii) $\{\mathbf{R}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k+1)})\}$ (new residuum);
 - (iv) $\|\{\mathbf{R}^{(k+1)}\}\| \leq \epsilon$? (convergence test) :
 - If yes : **STOP**, $\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}^{(k+1)}\}$
 - If no, set $k \leftarrow k + 1$ and goto 2.(i)

Remarques :

- 1- Bonnes propriétés de convergence (quadratique) ; peu d'itérations
- 2- L'opérateurs tangent $[\mathbf{K}^{(k)}]$ doit être calculer **à chaque itération**
== > cout potentiellement important

Convergence quadratique proche de la solution

Setting $\{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\mathbb{U}^{(k)}\} - \{\mathbb{U}\}$ (error w.r.t. solution) for every k , one has :

$$\{\mathbb{E}^{(k+1)}\} - \{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\delta\mathbb{U}^{(k)}\} = -[\mathbb{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbb{R}^{(k)}\}$$

Series expansion of $\{\mathbb{R}^{(k)}\}$ around $\{\mathbb{R}\} = \{0\}$ and for $[\mathbb{K}^{(k)}]$ around the exact solution :

$$\exists\alpha, \quad \mathbb{R}_I^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)}\mathbb{E}_J^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_J^{(k)} \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2)$$

$$\exists\beta, \quad \mathbb{K}_{IJ}^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)} + \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_I^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)-1} \left[\frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) - 2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \right] \mathbb{E}_K^{(k)} \mathbb{E}_L^{(k)} \\ &\quad + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \\ &= O(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \end{aligned}$$

Elasticité non linéaire – opérateur tangent constant

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\hat{\mathbb{K}}]\{\delta\mathbf{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

où la matrice de rigidité $[\hat{\mathbb{K}}]$ (définie positive) est arbitraire, par exemple

$$\mathcal{A}^{(0)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{0}}) \quad (\text{Tenseur d'élasticité à l'état naturel})$$

Algorithme de Newton modifié :

- (i) Convergence plus lente (linéaire) ; plus grand nombre d'itérations
- (ii) Réduction du cout de calcul à chaque itération
(la matrice tangente est calculée et factorisée LDL^T une seule fois)

Autre variantes :

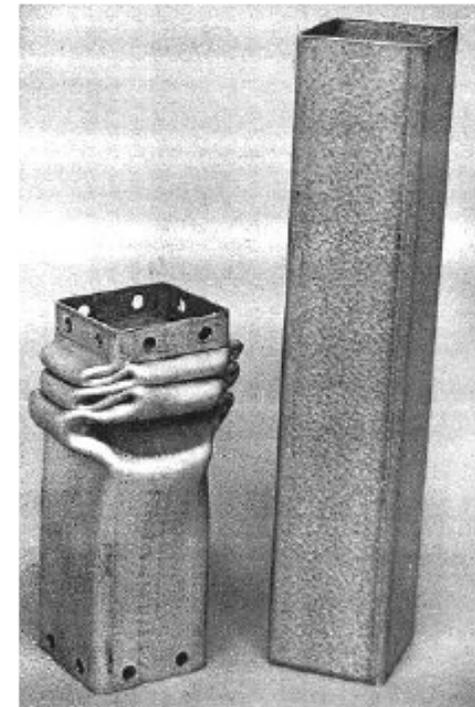
- (i) Variante « classique » : la matrice de rigidité mise à jour seulement toutes les m itérations
- (ii) Variante « sécante »

1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels) 

Cas 1D

Extension au cas général

Synthèse



dissipators employed
in crash tests

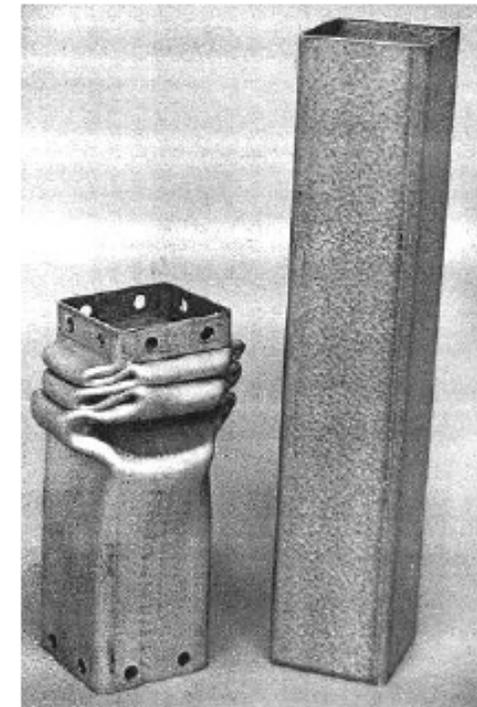
1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D



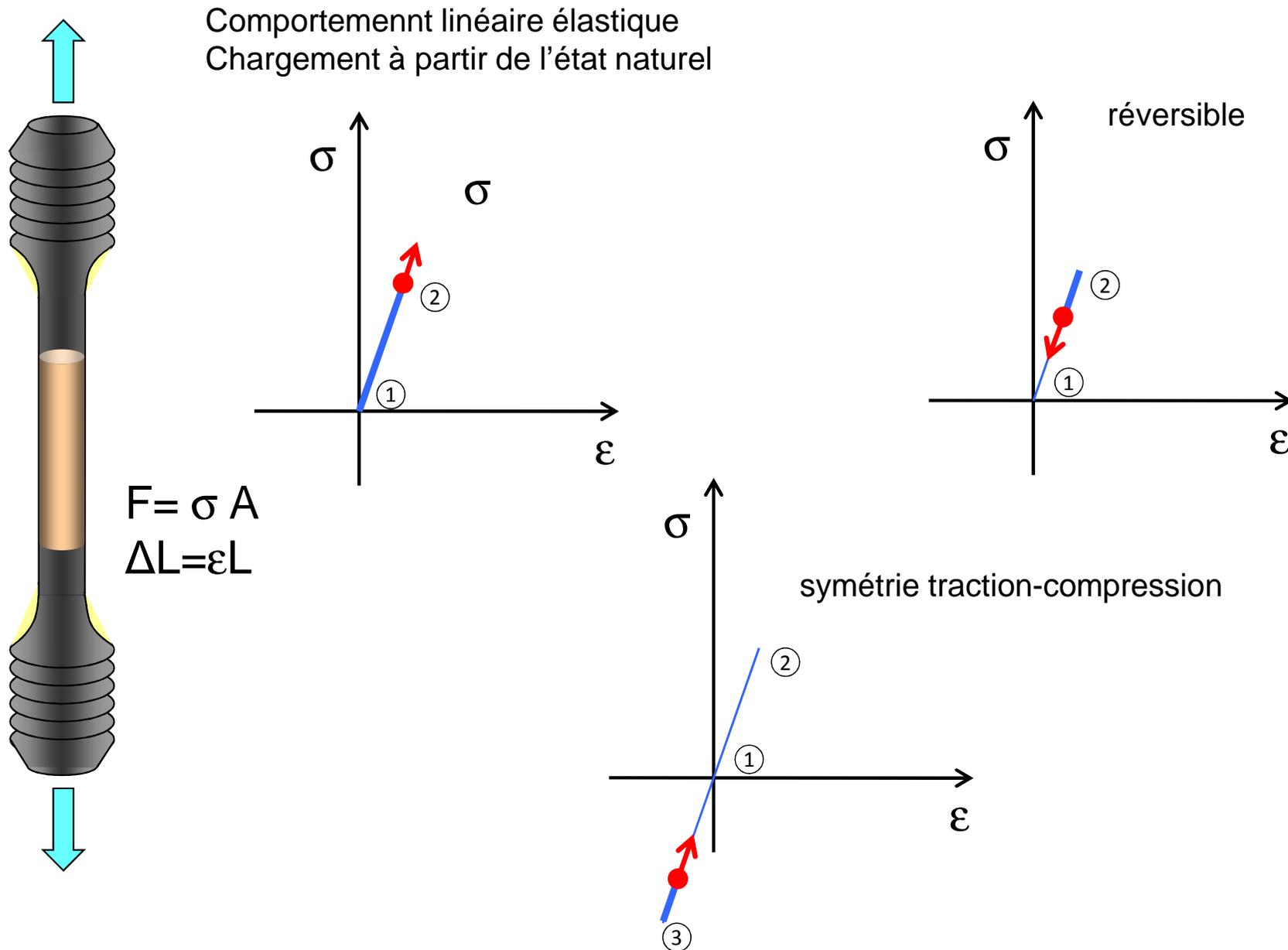
Extension au cas général

Synthèse



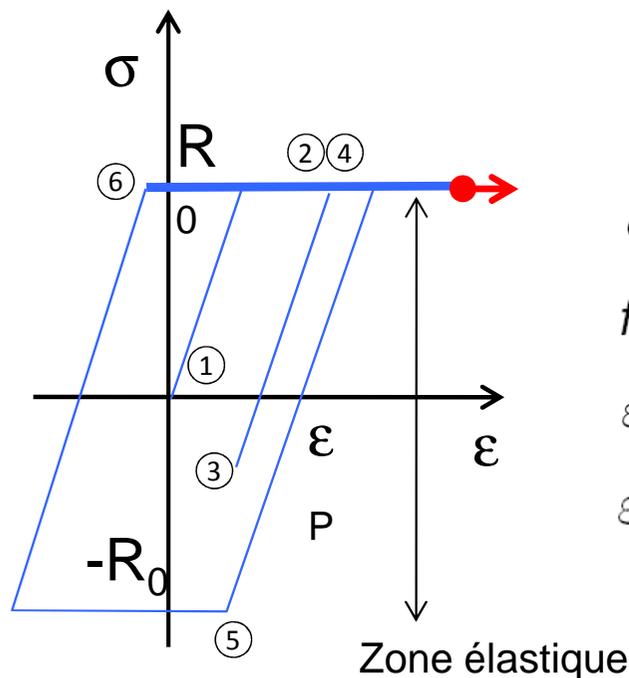
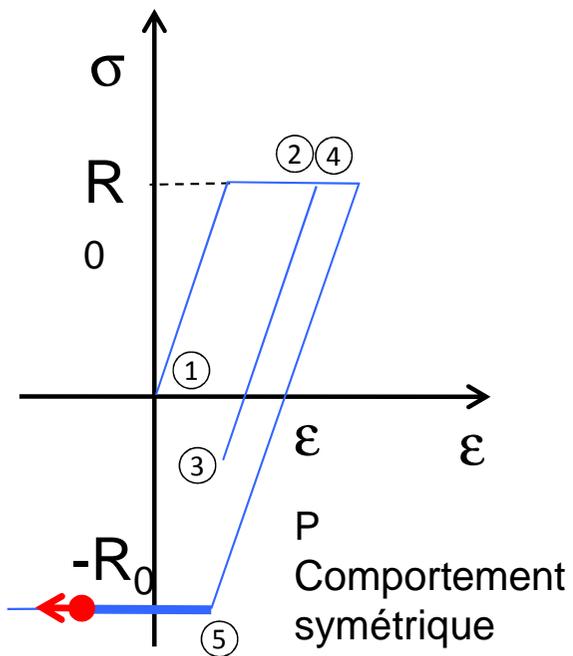
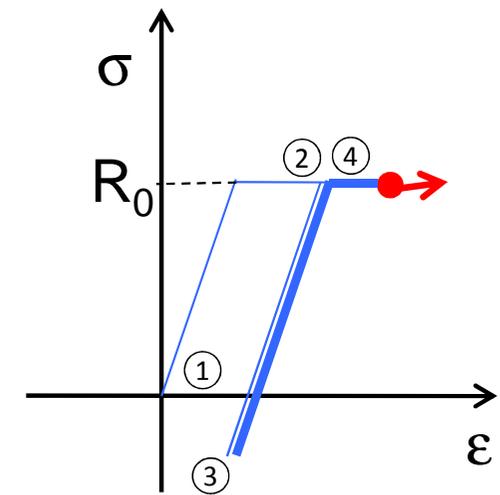
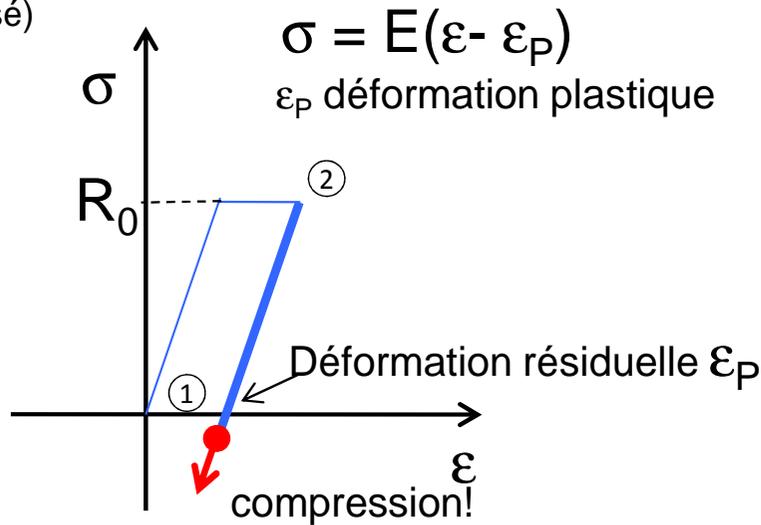
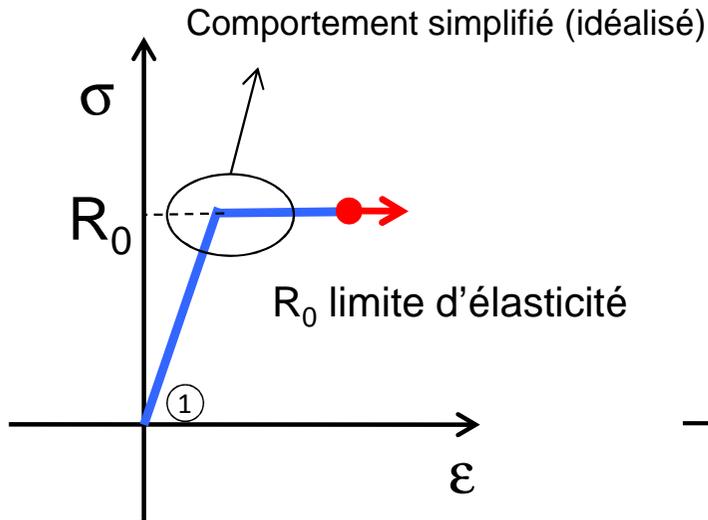
dissipators employed
in crash tests

Mise en évidence expérimentale : cas 1D



Mise en évidence expérimentale : cas 1D

(comportement idéalisé)



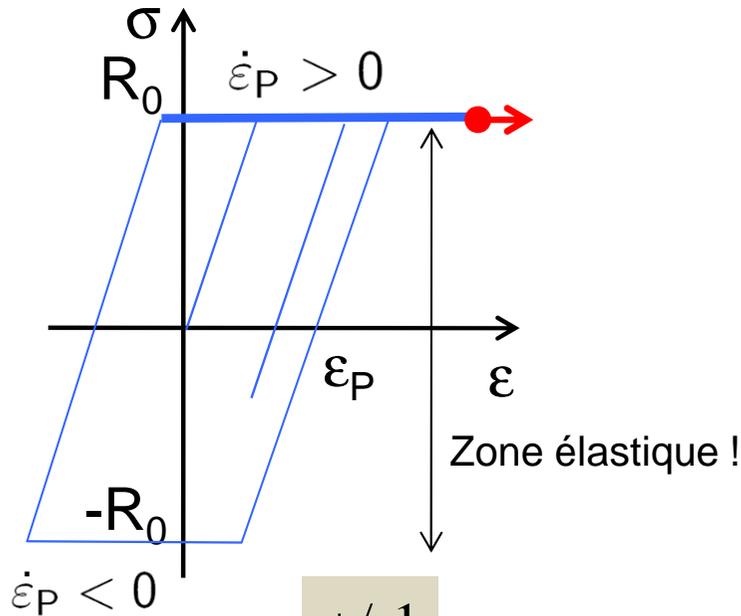
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{if} \quad f(\sigma) < 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad \text{only if} \quad f(\sigma) = 0$$

Formulation de modèle élastique-parfaitement plastique



$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) = E\varepsilon_E \quad \text{Déformation élastique vs. plastique}$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0 \quad \text{Fonction de charge (domaine d'élasticité)}$$

$$\dot{\varepsilon}_P = 0 \quad \text{if} \quad f(\sigma) < 0 \quad \text{Pas de déformation plastique à l'intérieur du domaine d'élastique}$$

$$\dot{\varepsilon}_P \neq 0 \quad \text{only if} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{Evolution de la déformation plastique ssi on est sur le bord du domaine élastique}$$

+/-1

γ multiplicateur plastique

$$\dot{\varepsilon}_P = \frac{df}{d\sigma} \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{Règle de normalité: } df/d\sigma \text{ est un vecteur "orthogonal" au domaine élastique}$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) \quad \dot{\varepsilon}_P = \frac{df}{d\sigma} \dot{\gamma} \quad \text{normalité}$$

fonction de charge

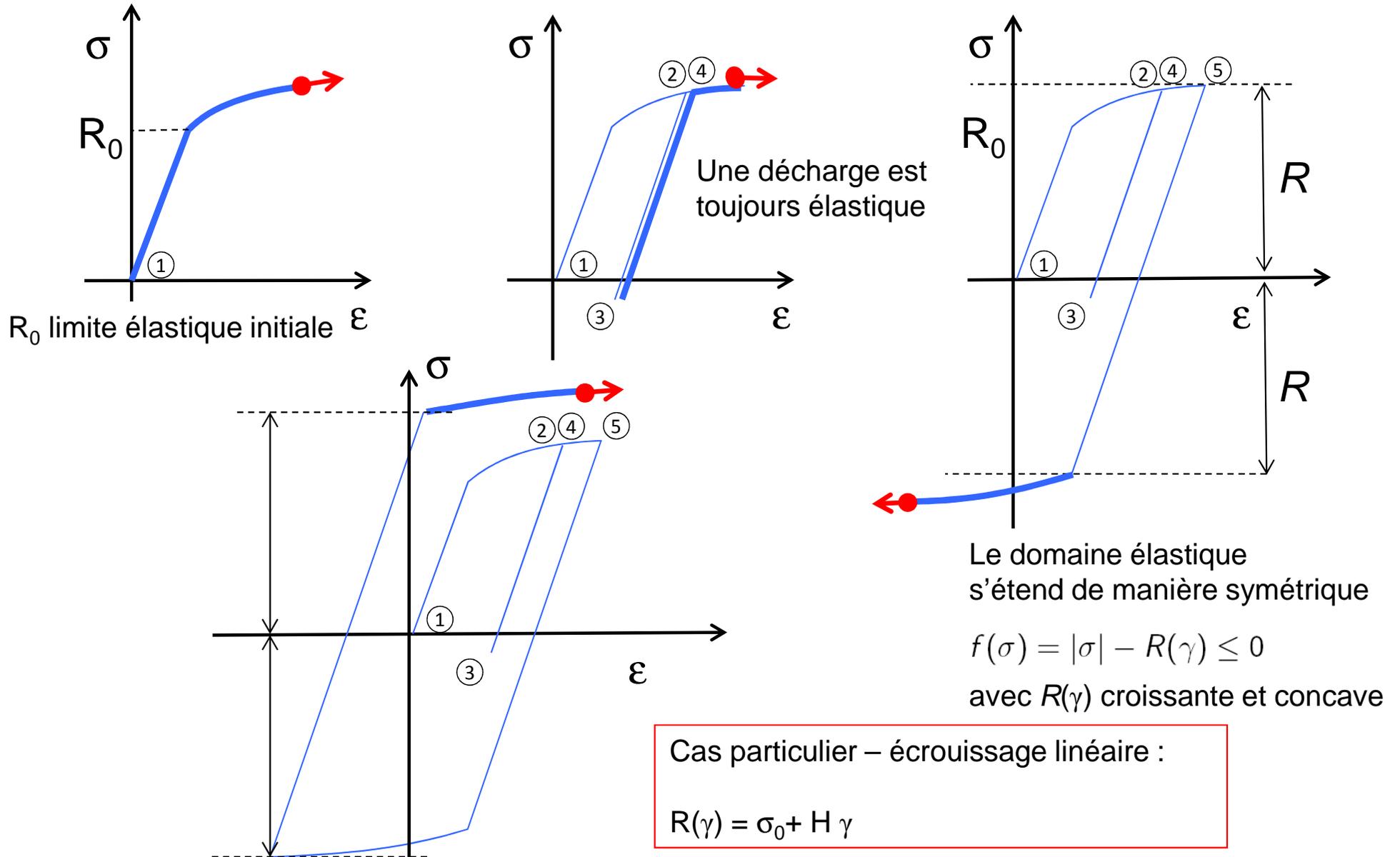
Multiplicateur plastique

complementarité

$$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\sigma)\dot{\gamma} = 0$$

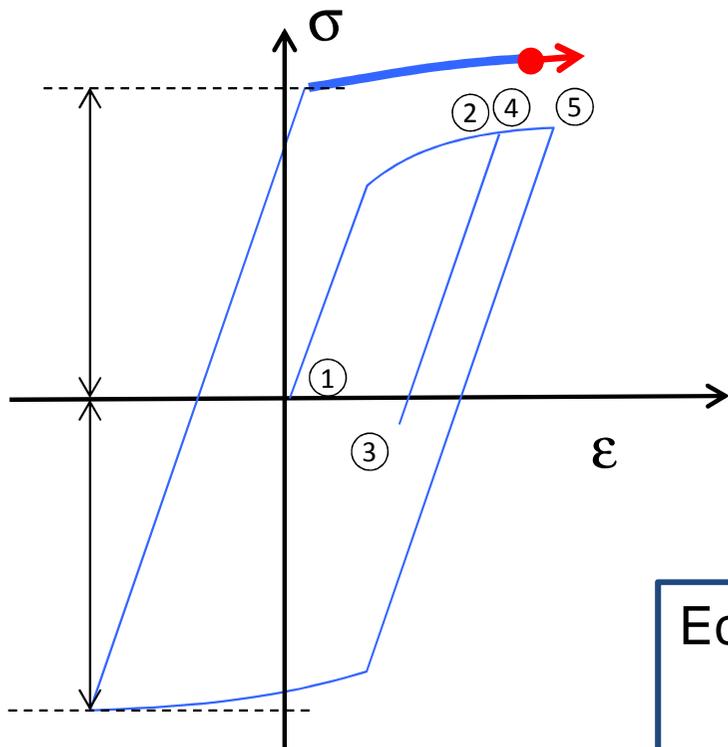
Mise en évidence expérimentale : écrouissage – cas isotrope

Écrouissage; si le chargement continue après la limite élastique, la limite élastique évolue



Formulation du modèle

élastique-plastique avec écrouissage isotrope



$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) = E\varepsilon_E \quad \text{Déformation élastique vs. plastique}$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0 \quad \text{Fonction de charge}$$

(domaine élastique)

$$\dot{\varepsilon}_P = 0 \quad \text{if} \quad f(\sigma) < 0 \quad \text{Pas de déformation plastique}$$

À l'intérieur du domaine élastique

$$\dot{\varepsilon}_P \neq 0 \quad \text{only if} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{Evolution de la}$$

déformation plastique
ssi on est sur le bord
du domaine élastique

Ecrouissage Isotropic est un exemple en général:

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\text{history of } \varepsilon_P) \leq 0$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) \quad \dot{\varepsilon}_P = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\gamma} \quad \text{normalité}$$

Fonction de charge

Multiplicateur plastique

complémentarité

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\sigma)\dot{\gamma} = 0$$

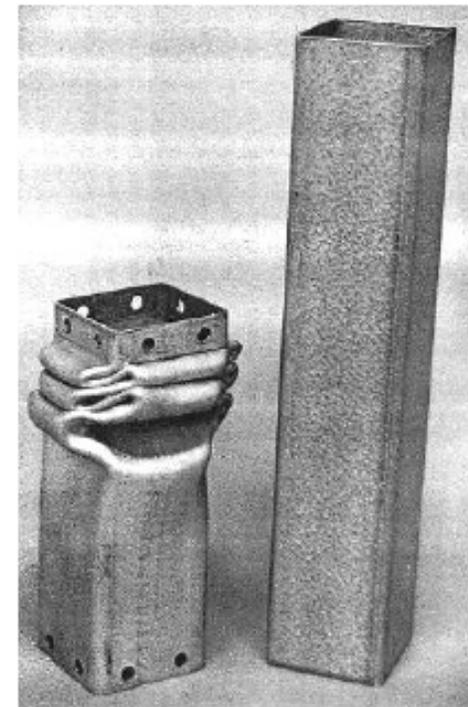
1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D

Extension au cas général



Synthèse



dissipators employed
in crash tests

Généralisation: domaine d'élasticité, limite élastique

Un grand nombre de matériaux présente un comportement élastique à l'intérieur d'un **certain domaine**

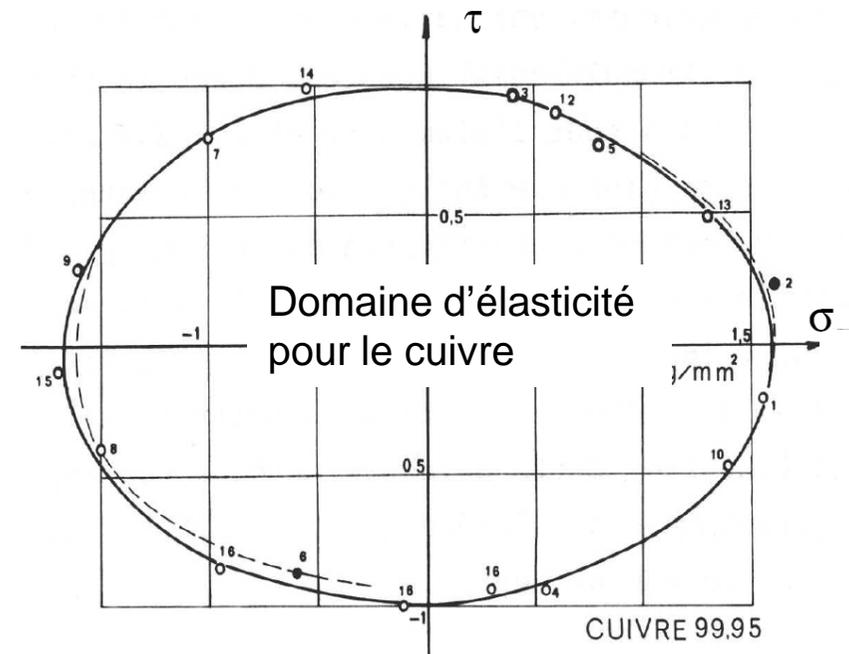
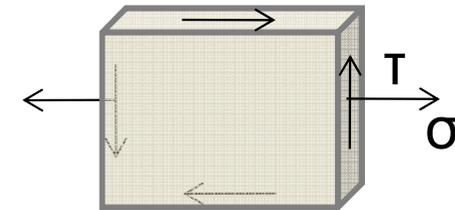
Domaine d'élasticité (à l'intérieur de la surface de charge)

if $f(\underline{\sigma}) < 0$: **elastic behaviour**

Si l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine d'élasticité == > pas d'évolution plastique

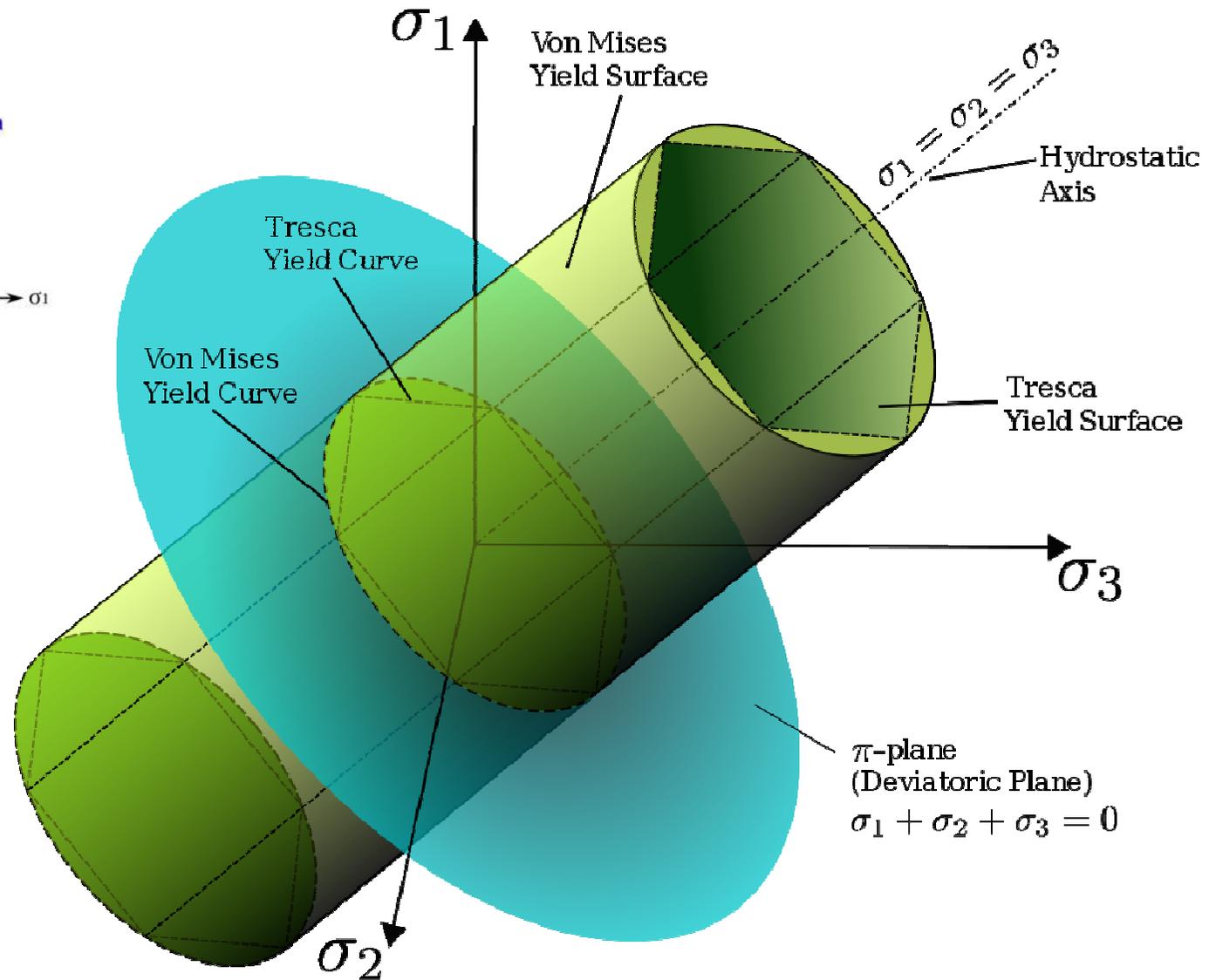
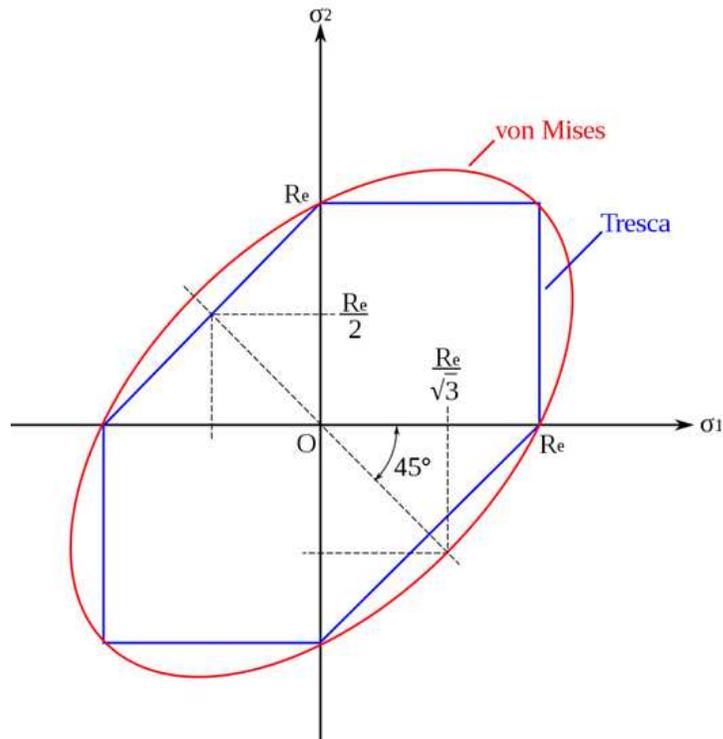
in 1D:

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0$$



Exemple de surface de charge : Von Mises and Tresca

Espace des contraintes principales



Critère de Von Mises (1913)

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{\mathbf{1}}}_{\text{Terme de pression}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Limite d'élasticité} \\ \text{Contrainte équivalente} \\ \text{Déviateur des contraintes} \end{array}$$

- **Limite indépendante de la pression**
- **Utilisé pour décrire la plasticité des métaux**
(déformation plastique due au cisaillement, dislocations du réseau cristallin)
- Pour une traction uniaxiale $\underline{\sigma} = \sigma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$ on a $\sigma^{\text{eq}} = \sigma$ (justification du coef $\sqrt{3/2}$)
- R : limite élastique observé sous un chargement de traction uniaxial

Déformation plastique

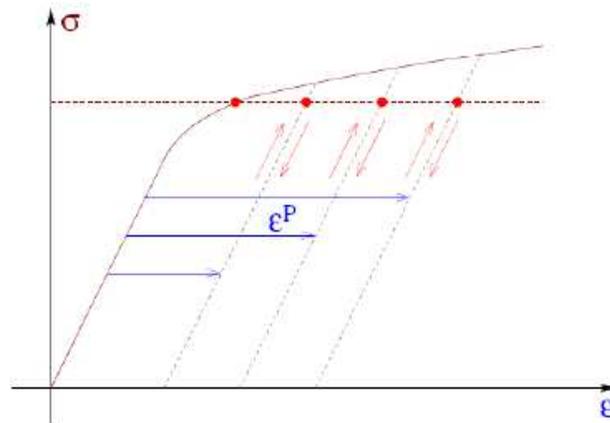
➤ Déformation élastique et plastique

$$\underline{\underline{\epsilon}}^E = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\epsilon}}^P = \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^E \quad \text{i.e.} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\epsilon}}^E = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^P)$$

➤ Pas d'évolution de la déformation plastique

dans une évolution purement élastique du matériaux

➤ A un état de contraint peut correspondre à une infinité de valeur de $\underline{\underline{\epsilon}}^P$



➤ Déformation plastique cumulée : une mesure du trajet de déformation plastique

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(\tau)\| d\tau \quad \text{en uniaxial} : \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \sigma^{eq} \dot{p}$$

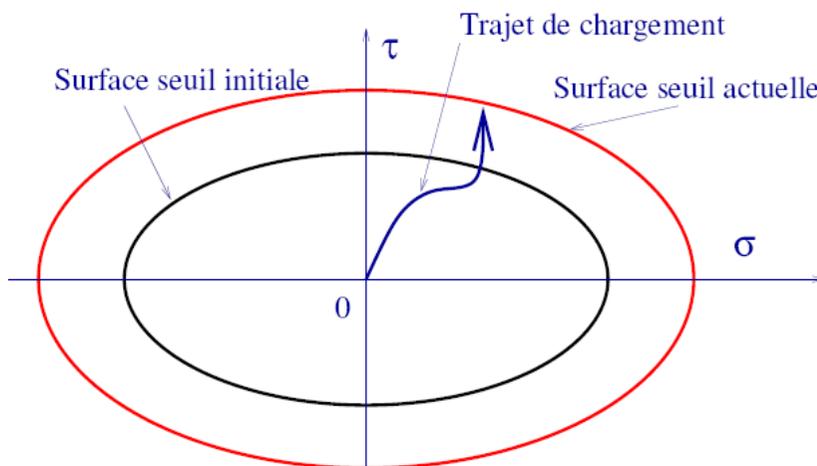
Evolution de la limite d'élasticité, écrouissage

Remarques:

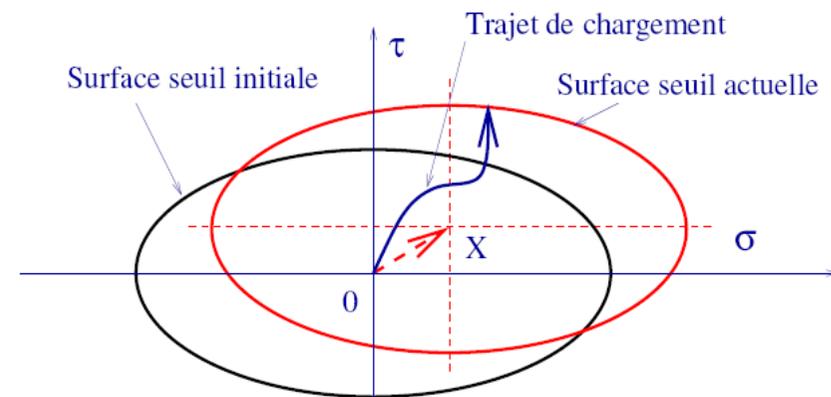
- Chargement peut augmenter la limite élastique initiale
- Si chargement au delà de la limite élastique (charge, décharge, recharge ...) : la **surface de charge évolue**
- Ce phénomène est appelé **écrouissage**
- La limite élastique évolue en fonction de la déformation plastique

Ecrouissage isotrope :

$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma^{eq} - R \leq 0$ La limite élastique R dépend de l'histoire de la déformation plastique



Ecrouissage isotrope

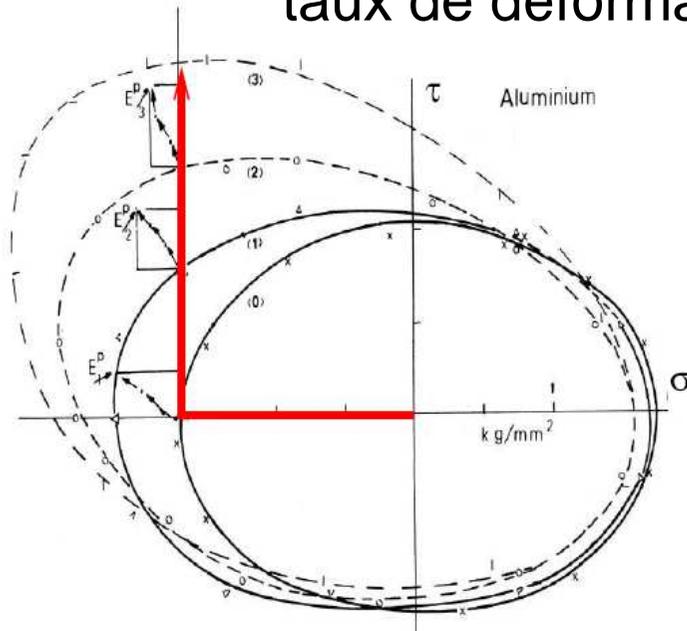


Ecrouissage cinématique

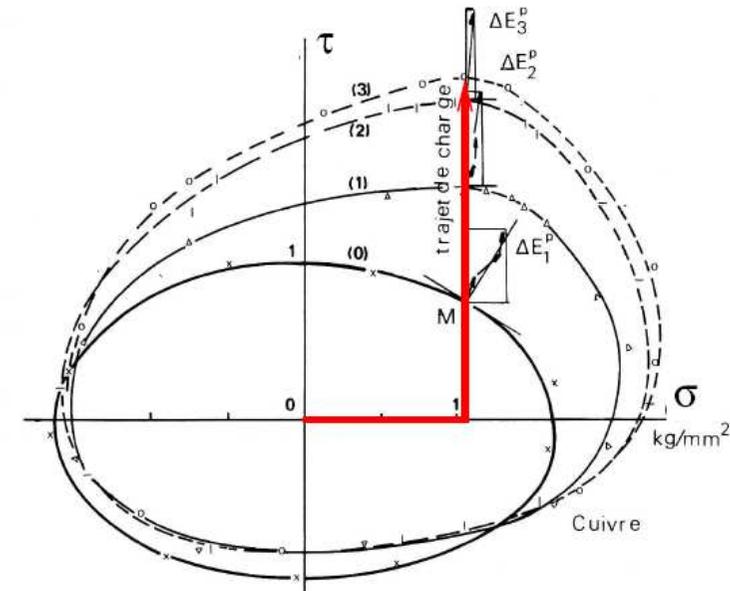
Règle de Normalité

- Observation expérimentale :

taux de déformation plastique est **normal** à la surface de charge



[Bui, 1970]



- Formulation de la **règle de normalité**

$$\begin{cases} \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \text{ is directed as the outgoing normal to } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$: multiplicateur plastique (a priori inconnu)

Règle de normalité : Critère de Von Mises

➤ Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \sqrt{\sigma_{ij}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\sigma_{ij}^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}^2) = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma_{eq}} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sigma_{ij}^2 + \frac{(tr \sigma)^2}{3} - \frac{2(tr \sigma)^2}{3} \right] \right] = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \times \left[2\sigma_{ij} - \frac{2tr \sigma}{3} \delta_{ij} \right] = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Règle de normalité : Critère de Von Mises

- Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- Règle de normalité

Purement déviatorique

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- Lien entre $\dot{\gamma}$ et \dot{p} :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{\text{eq}} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = \dot{\gamma}$$

Loi de comportement s'écrit finalement :

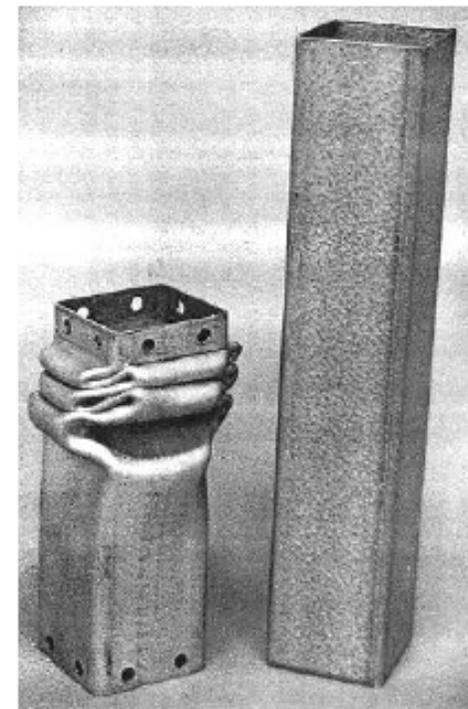
$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

1. Durée de vie des matériaux et des structures
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D

Extension au cas général

Synthèse



dissipators employed
in crash tests

Synthèse

➤ Hypothèses

- HPP, linéaire, isotrope, élastique
- Critère de Von Mises
- Règle de normalité, écrouissage isotrope

Loi de comportement linéaire élastique isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

➤ Loi de comportement

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\|$$

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}})$$

Elasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0$$

Règle de normalité

Hypothèse sur $R(p)$ (convexité de $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$)

(i) $R(0) = R_0$ (ii) $R'(p) \geq 0$

(iii) $R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

that's all folks