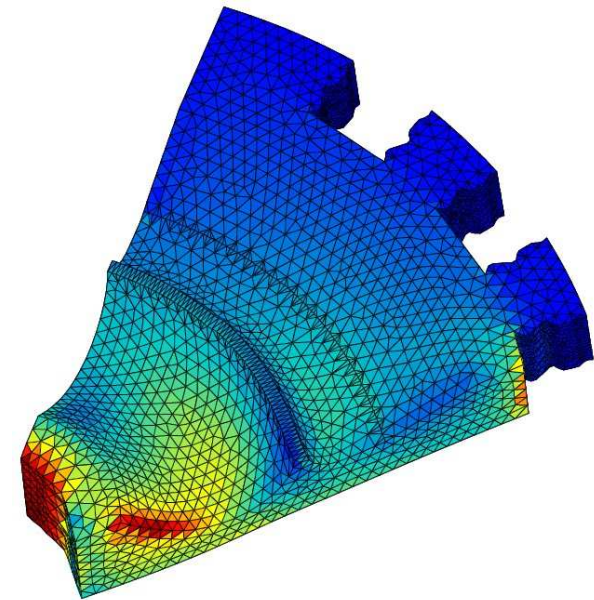
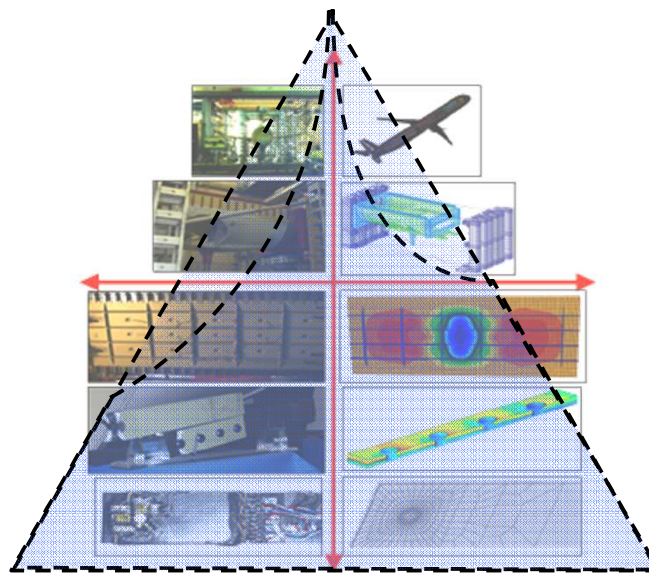
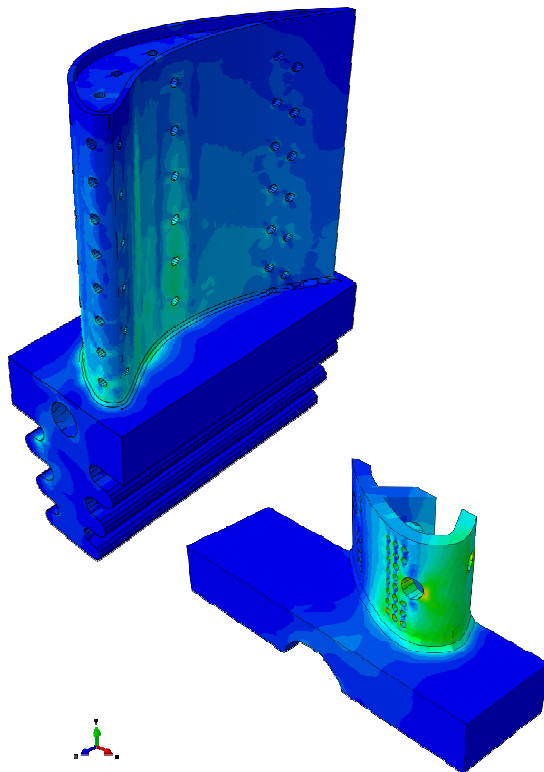


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Christian Rey

christian.rey@safrangroup.com



Equipe :

Cours

Christian Rey: Safran Tech

christian.rey@safrangroup.com

Frédéric Feyel: Safran Tech

frédéric.feyel@safrangroup.com

Séances pratiques (Octave)

Felipe Bordeu: Safran Tech

felipe.bordeu@safrangroup.com

Clément Olivier: Safran Tech

clement.olivier@safrangroup.com

Livre :

Titre : **The finite element method in solid mechanics**

Auteurs : Marc Bonnet, Attilio Frangi, Christian Rey

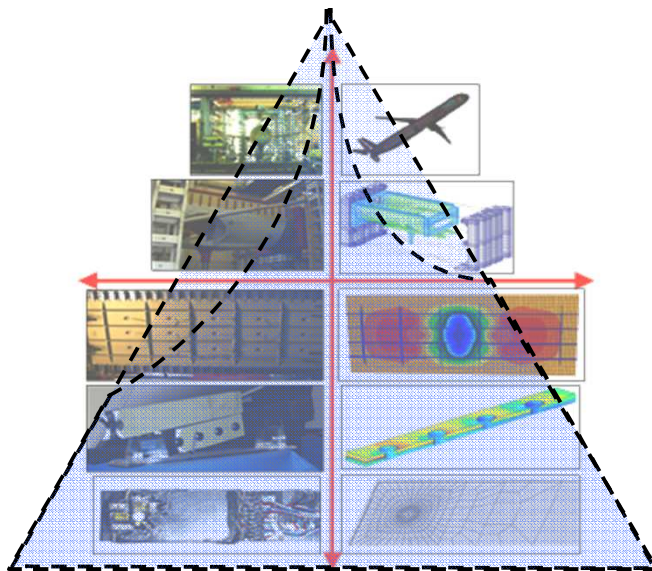
Editeur : Mc Graw Hill Education

http://www.catalogo.mcgraw-hill.it/catlibro.asp?item_id=3010

Année : 2014

La Méthode des Eléments Finis :

- Outils maintenant indispensable dans le monde de l'ingénierie et de la conception (solide & fluide)
- Remplacer /enrichir **les campagnes expérimentales (couteuse)** pour mieux comprendre la physique sous jacente (après calibration des modèles)
- **Optimisation** des process et/ou produits existants
- **Conception** de nouveau produits

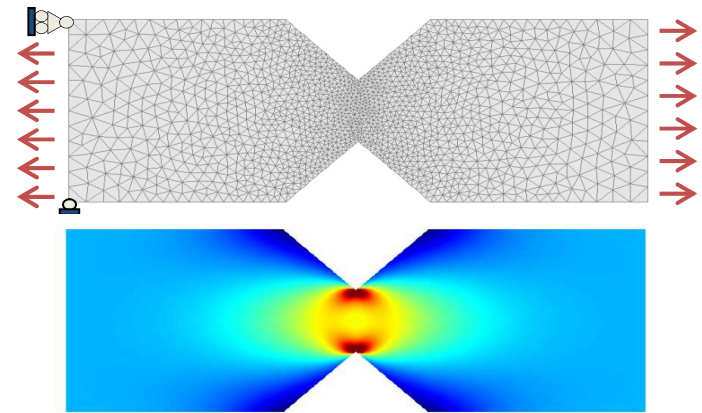
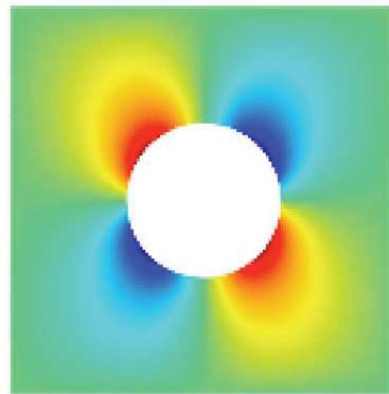
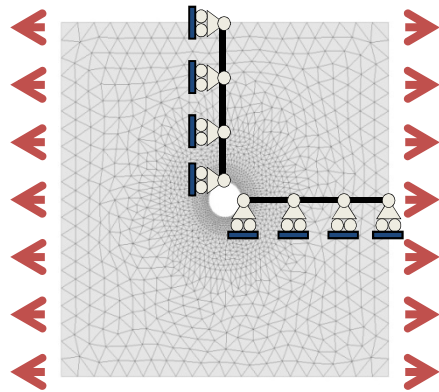


Quelques codes commerciaux:
Abaqus, Ansys (international)

Autres codes
Zset, Castem, Aster

Plan du cours

- 1- Elasticité linéaire – Méthode de Galerkin - Éléments finis isoparamétriques
- 2- La méthode des éléments finis
- 3- Introduction aux calculs de structures non-linéaires
- 4- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Octave

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode de Galerkin

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin

Les équations du problème

Hypothèses

Petite perturbation (HPP)

Tenseur des déformations linéarisé
 Tenseur des contraintes de Cauchy
 Déplacement

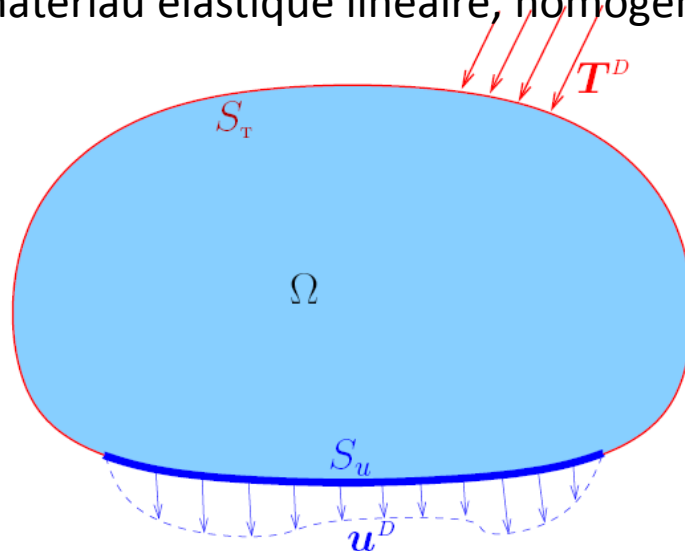
$$\| \underline{\underline{\varepsilon}} \| \ll \| \underline{\underline{\sigma}} \| \ll \| \underline{u} \|$$

Evolution quasi-static

Effets d'inertie négligé

Comportement

matériau élastique linéaire, homogène, isotrope



Les équations s'écrivent:

- Equation de compatibilité

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u})$$

- Equation d'équilibre

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0$$

Force de masse

- Loi de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Tenseur d'élasticité

- Condition aux limites

$$\underline{u} = \underline{u}^D \quad (\text{on } S_u)$$

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \quad (\text{on } S_T)$$

Propriétés du tenseur d'élasticité

- \mathcal{A} satisfait les petites et grandes symétries

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij}$$

\mathcal{A} est définie positif

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T$$

- Les tenseur de souplesse \mathcal{S} (forme inverse de la loi de comportement)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \mathcal{A} : \mathcal{S} = \mathcal{S} : \mathcal{A} = \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I} \text{ Tenseur identité du quatrième ordre } \mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

est définie positif

$$\underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\tau}}, \|\underline{\underline{\tau}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^T$$

Matériau élastique linéaire isotrope

Notation de Voigt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ & & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ & & & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ & \text{SYM} & & & A_{2323} & A_{2313} \\ & & & & & A_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \{\sigma\} &= [A]\{\varepsilon\} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} > 0, \quad \forall \{\varepsilon\} \neq 0$$

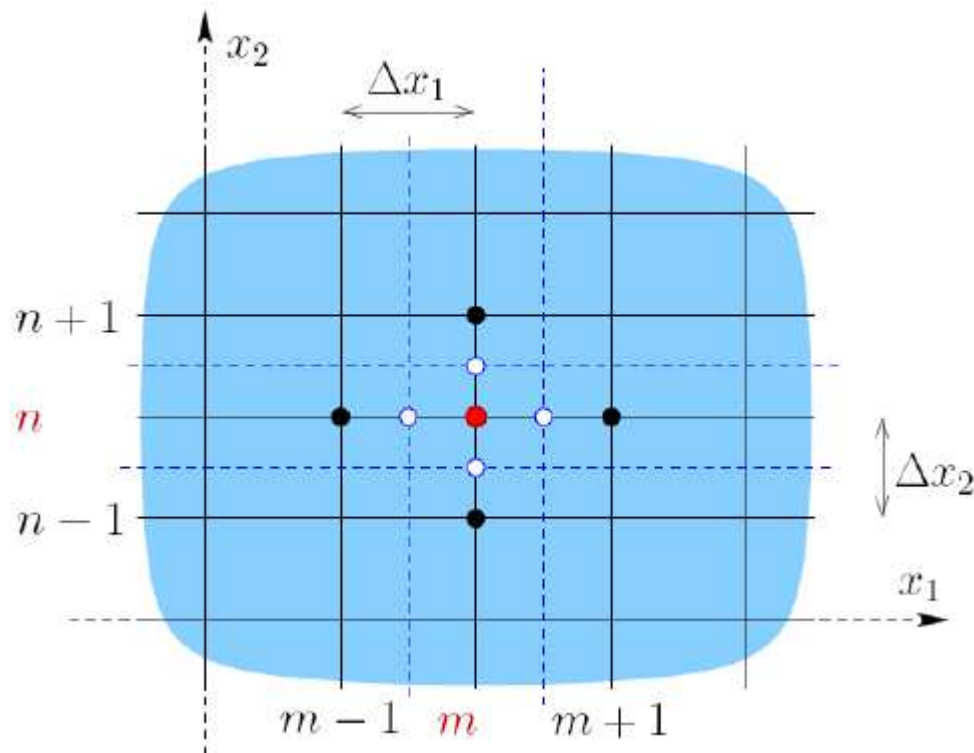
$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} \text{ (si isotrope)}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [A]^{-1}\{\sigma\}$$

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Approximation par différence finie



$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)}) \approx \frac{1}{\Delta x_1} [\underline{u}(\underline{x}^{(m+1, n)}) - \underline{u}(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_2}(\underline{x}^{(m+1/2, n+1/2)}) \approx \frac{1}{\Delta x_2} [\underline{u}(\underline{x}^{(m, n+1)}) - \underline{u}(\underline{x}^{(m, n)})]$$

$$\text{div}(\underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) + \rho \underline{f} = \underline{0} \quad (2\text{nd order})$$

- ❑ Seulement pour des géométries simple (difficulté pour imposer des conditions aux limites)
- ❑ Les différences finies sont très peu utilisé en mécanique du solide pour la discrétisation en espace

Approximation par différence finie

Les Différences Finies:

- ❑ Très peu utilisée pour la discrétisation en espace en mécanique du solide
- ❑ Par contre, elle sera utilisée pour la discrétisation temporelle

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (f(t_{n+1}) - f(t_n)) \quad (\text{diffusion})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1})) \quad (\text{dynamics})$$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin

Les espaces de champs admissibles

- Espace de champs de déplacement suffisamment régulier (énergie bornée)

$$\mathcal{C} = \left\{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continuous over } \Omega, \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV < +\infty \right\}$$

- Espace de champs comptable avec les conditions aux limites

- **Admissibilité cinématique** (déplacement):

$$\mathcal{C}(\underline{u}^D) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{u}^D \text{ on } S_u \}$$

- **Admissibilité statique** (contraintes)

$$\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) = \{ \underline{\underline{\tau}} \mid \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{f} = 0 \text{ in } \Omega, \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ on } S_T \}$$

- Espace de champs compatible avec des conditions aux limites à zéro

$$\mathcal{C}(\underline{0}) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{0} \text{ on } S_u \}$$

Le problème d'équilibre en élasticité linéaire se ré-écrit :

$$\text{find } \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ and } \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \text{ such that } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}](\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega)$$

Formulation faible

- Formulation faible des équations d'équilibre locales :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV}_{-\mathcal{P}_i(\underline{w})} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{w} \, dS}_{\mathcal{P}_e(\underline{w})} \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- s'obtient par intégration par partie :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}) \cdot \underline{w} \, dV = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- correspond au principe des puissances virtuelles (PPV)

- La loi de comportement et l'équation de compatibilité imposés point à point:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Formulation faible

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

Remarques:

- pas de référence explicite aux conditions aux limites en déplacement
- inconnue \underline{T} sur S_u (forces de réaction associées aux déplacements imposés)

Deux possibilités (variantes de l'équation précédente):

- élimination de \underline{T} sur S_u
- imposer les conditions aux limites en déplacement u^D sur S_u de manière faible

Première variante: éliminer la réaction inconnue (\underline{T})

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- Restreindre le champs test \underline{w} aux champs cinématiquement admissible à zéro: on prend donc \underline{w} dans

$$\mathcal{C}(0) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \mathcal{C} \text{ and } \underline{v} = \underline{0} \text{ on } S_u \}$$

- \underline{u} satisfait les conditions aux limites de manière forte: $\underline{u} = \underline{u}^D$ on S_u

Remarque:
cadre classique
des codes FEM

Le problème s'écrit alors:

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Deuxième variante : CL déplacement imposées de manière faible

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

- pas de restrictions sur \underline{w}
- CL en déplacement imposées de manière faible au travers d'une nouvelle équation

$$\int_{S_u} (\underline{u} - \underline{u}^D) \cdot \underline{T}' \, dS = 0 \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

find $(\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'(S_u)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV - \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} \, dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}$$

$$\int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' \, dS = \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' \, dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'(S_u)$$

ou l'ensemble \mathcal{C}' des efforts admissibles est défini par dualité par rapport à \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}'(S_u) = \left\{ \underline{T}' \mid \forall \underline{w} \in \mathcal{C}, \int_{S_u} \underline{T}' \cdot \underline{w} \, dS < +\infty \right\}$$

Exemple typique des formulations dites "mixte"

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Methode de Galerkin

Formulation variationnelle

La solution du problème d'élasticité linéaire peut être défini comme étant le champ qui minimise une certaine fonctionnelle (énergie)

Les fonctionnelles énergies

Energie potentielle totale

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}) \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV \\ \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS\end{aligned}$$

Le champs de déplacement solution du problème minimise \mathcal{P} :

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$$

Energie potentielle totale complémentaire

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) - \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}) \\ \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}} \, dV \\ \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS_x\end{aligned}$$

Le champ de contrainte solution du problème minimise \mathcal{P}^* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$$

Evidemment, une seule des deux minimisations est nécessaire !

Par exemple: $\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v})$

puis en calcul les champs de contrainte par la loi de comportement $\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]$

Stationnarité de l'énergie potentielle totale

On considère le déplacement \underline{u} solution du problème puis on calcule la variation $\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w})$ $\underline{w} \in \mathcal{C}(0)$

$$\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{u}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle + o(|\eta|) \quad (\underline{w} \in \mathcal{C}(0))$$

Le minimum est caractérisé par l'annulation du terme du première ordre en η dans toutes les directions

$$\langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire, cela conduit à:

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

ce qui correspond à la forme faible (première variante – sans la réaction inconnue)

Formulation faible: multiplier la forme forte des équations locale par un fonction test puis IPP

Formulation variationnelle: correspond à imposer que la variation d'une certain fonctionnelle s'annule

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v})$$

$$\mathcal{W}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV$$

$$\mathcal{F}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS$$

$$\mathcal{P}(\underline{u} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{u}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle + o(|\eta|) \quad (\underline{w} \in \mathcal{C}(0))$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} + \eta \underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} + \eta \underline{w}] =$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] + 2\eta \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] + \eta^2 \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}]$$

$$\rho \underline{f} \cdot (\underline{u} + \eta \underline{w}) = \rho \underline{f} \cdot \underline{u} + \eta \rho \underline{f} \cdot \underline{w}$$

$$\underline{T}^D \cdot (\underline{u} + \eta \underline{w}) = \underline{T}^D \cdot \underline{u} + \eta \underline{T}^D \cdot \underline{w}$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

Chapitre 1: Méthode d'approximation en mécanique des solides

1. Les équations du problème (forme forte)
2. Formulation faible
3. Formulation variationnelle
4. Méthode d'approximation: méthode de Galerkin

Minimisation approchée: méthode de Galerkin

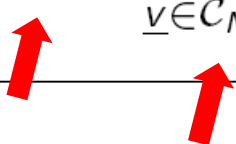
- ❑ Les ensembles $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ et $\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ de champs admissibles sont de **dimension infinie**

- ❑ La minimisation exacte:

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}) \qquad \underline{\sigma} = \arg \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$

est en règle général impossible
(complexité des géométries réelles ...)

- ❑ **Principe** : Minimisation dans un sous ensemble de **dimension finie**

$$\underline{u}_N = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}_N(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}) \qquad \underline{\sigma}_N = \arg \min_{\underline{\tau} \in \mathcal{S}_N(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\tau})$$


Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

Minimisation de $\mathcal{P}(\underline{v})$ ou \underline{v} est de la forme

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \text{with } \underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D), \quad \underline{\varphi}^K \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

ou les fonctions de base $(\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^N)$ et le champs admissible $\underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ sont choisis a priori

- ➔ Liste des déplacements généralisés $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}^T$
- ➔ Matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^J] dV \quad (1 \leq I, J \leq N)$$

- ➔ Liste des efforts généralisées $\{\mathbb{F}\}$

$$F_I = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\varphi}^I dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\varphi}^I dS \quad (1 \leq I \leq N)$$

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}) \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] dV \\ \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} dS \end{aligned}$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\})$$

$[\mathbb{K}]$ est une matrice carrée $N \times N$, symétrique, définie positive

(si suffisamment CL en \underline{u} sont imposées):

$$\{\alpha\} \neq \{0\} \Rightarrow \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} > 0$$

$P(\{\alpha\})$ a un et un seul minimum défini par

$$\frac{\partial P}{\partial \{\alpha\}} = \{0\} \quad \text{or} \quad [\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\}$$

conduisant au déplacement généralisé optimal $\{\alpha^{\min}\} = [\mathbb{K}]^{-1} \{\mathbb{F}\}$

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^{(D)}) \text{ par construction}$$

REMARQUE IMPORTANTE:

$$\underline{\sigma}_N = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}](\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^K](\underline{x}) \notin \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \text{ in general}$$

Méthode de Galerkin pour la forme faible

Formulation faible d'un problème d'élasticité linéaire

find $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ such that

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0})$$

Le **choix** de l'inconnue et du champ virtuel:

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}) &= \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) && \implies \underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \\ \underline{w}(\underline{x}) &= \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x}) && \implies \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}) \end{aligned}$$

conduit au **même système linéaire** :

$$\begin{aligned} \forall \{\alpha^*\} \in \mathbb{R}^N, \quad \{\alpha^*\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha^*\}^T \{\mathbb{F}\} &= \{0\} \\ \implies [\mathbb{K}] \{\alpha\} &= \{\mathbb{F}\} \end{aligned}$$

Méthode de Galerkin: Quelques propriétés importantes (1/2)

Définissons la solution \underline{u} comme $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta \underline{u}$
($\Delta \underline{u}$ est ainsi l'“erreur” par rapport à la solution exacte)

□ Champ virtuel

$$\underline{w}_N(\underline{x}) = \sum_{J=1}^N \alpha_J^* \underline{\varphi}^J(\underline{x})$$

□ Formulation faible (écrite pour la solution **exacte** \underline{u})

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

□ Formulation faible (écrite pour la solution **approchée** \underline{u}_N)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS$$

L'erreur $\Delta \underline{u}$ est orthogonale à tout champ virtuel appartenant à l'ensemble où la solution approchée est cherchée (au sens de la norme “énergétique”)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = 0$$

Méthode de Galerkin: Quelques propriétés importantes (2/2)

Calculons l'énergie de déformation de $\underline{u} - \underline{v}_N = \Delta \underline{u} + (\underline{u}_N - \underline{v}_N)$

Avec le champ cinématiquement admissible arbitraire $\underline{v}_N = \underline{u}^{(D)} + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K$

(on a toujours ... $\underline{u} - \underline{u}_N = \Delta \underline{u}$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV \\ & \quad + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{v}_N] dV}_{=0 \text{ (orthogonality)}} \end{aligned}$$

Propriété de meilleure approximation:

\underline{u}_N est la meilleure approximation de la solution exacte \underline{u}

dans l'espace d'approximation choisi (au sens de la norme énergétique):

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{v}_N] dV$$

Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle complémentaire

Minimisation de $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$ pour des champs de la forme

$$\underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\tau}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \beta_K \underline{\tau}^K(\underline{x})$$

Bien plus compliqué !!!!!

avec $\underline{\tau}^{(D)} \in \mathcal{S}(T^D)$ et $\underline{\tau}^K \in \mathcal{S}(0)$
choisi a priori

$$\mathcal{P}^*(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [S] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{U^d\} + \mathcal{P}^*(\underline{\tau}^{(D)}) = P^*(\{\beta\})$$

La solution approchés (en terme de contrainte) est définie par

$$[S] \{\beta\} = \{U^d\} \Rightarrow \{\beta^{\min}\} = [S]^{-1} \{U^d\}$$

***En règle général, il ne peut pas être intégré et
conduire à un champ cinématiquement admissible***

Discussion

Méthode de Galerkin : version en “déplacement”

Fonctions de base $(\underline{\varphi}^K)$ doivent être cinématiquement admissibles

== > assez facile à construire (régularité + énergie finie)

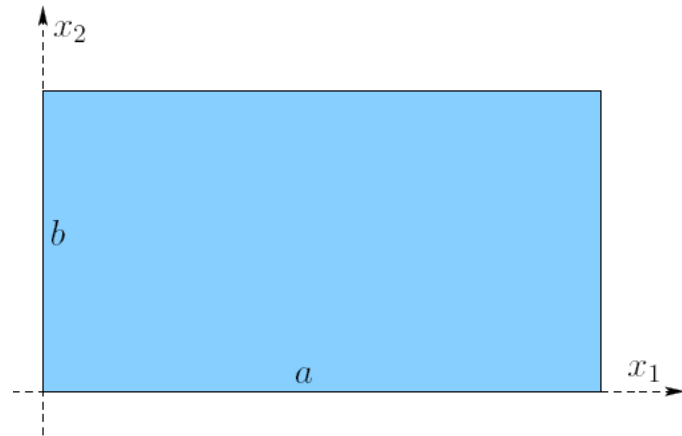
Que choisir comme sous espace de dimension finie ?

Méthode de Galerkin : Version en “contrainte”

Les fonctions de bases $(\underline{\tau}^K)$ doivent être statiquement admissible ($\text{div } \underline{\tau}^K = \underline{0}, \dots$)

== > bien plus difficile à construire

Exemple 1: Fonctions de base définies sur tout le domaine



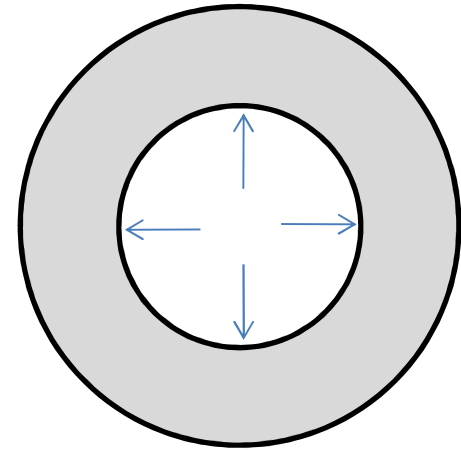
Exemples:

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}^J(\underline{x}) &= (a) P_m(x_1)P_n(x_2)\underline{e}_j \\ &= (b) \sin\left(2\pi m \frac{x_1}{a}\right) \sin\left(2\pi n \frac{x_2}{b}\right)\underline{e}_j \\ &= \dots \\ &\text{(separation of variables)}\end{aligned}$$

- ✓ la **convergence** de $\|\underline{u} - \underline{u}_N\|$ est très rapide (exponentiel versus le nombre de termes) si \underline{u} est suffisamment régulière
- ✓ Peu adaptée au géométrie complexe et aux problèmes avec des singularités
- ✓ Très peu utilisé en mécanique du solide mais ... beaucoup plus en **mécanique des fluides** (méthodes spectrales)

Exemple 2 : La sphère creuse

Sphère creuse (Rayon interne $r = R_1$, rayon externe $r = R_2$)
 Soumise à une pression interne et un déplacement
 $u(R_2) = d$ sur sa surface externe



$$v(r) \in \mathcal{C}(u^{(D)}): \quad v(r) = u^{(D)}(r) + \sum_{l=1}^N \alpha_l (r - r_2)^l$$

$$u^{(D)}(r) = d \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$$

Order of polynomes N	0	1	2	3
rel. err. \mathcal{P}	1.29087	0.442361	0.0596442	0.00501164
$\ u - u_N\ _0$	0.157699	0.0341987	0.00790153	0.00201395
$\ (du/dr) - (du_N/dr)\ _0$	0.423933	0.244242	0.0810537	0.0226432

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R_1}^{R_2} f^2 r^2 dr \right)^{1/2}$$

Exemple 3: Fonctions de base à support locale

== > introduction aux éléments finis

Difficulté des approches “globale”

- ✓ Peu adapté aux géométries complexes
- ✓ Difficulté pour imposer des conditions aux limites en déplacement

Principe de base de la Méthode des Éléments Finis (MEF):

Méthode de Galerkin avec des fonctions de base ayant un “petit” support

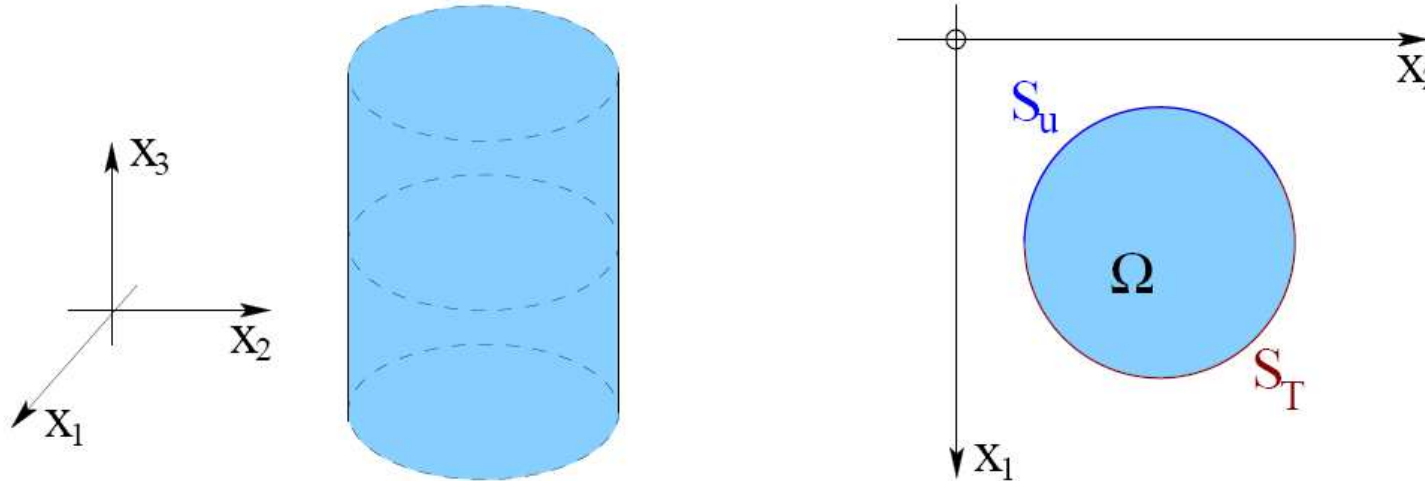
$$\underline{\varphi}^J = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_J$$

Chapitre 2: Éléments finis isoparamétriques

1. Exemple : déformation plane – élément linéaire triangulaire
2. Éléments finis isoparamétriques
3. Maillage – Maillage conforme - Régularité
4. Structure de données – code octave/matlab

Exemple : Hypothèse des déformations planes

La solution est invariante par rapport à x_3



Le champ de déplacement est de la forme:

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2$$

$u_3 = 0$;
 u_1 et u_2 ne dépendent pas de x_3

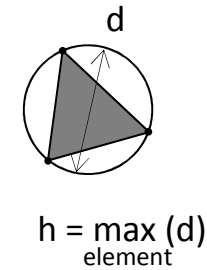
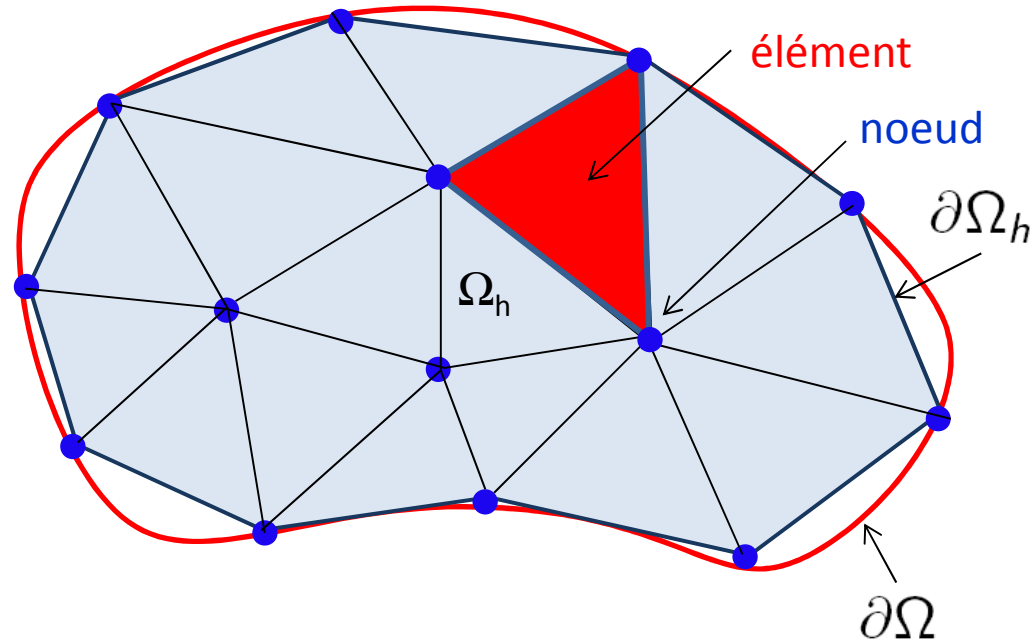
conduisant à :

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Autre cas: contrainte plane

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

Discrétisation du domaine → Maillage



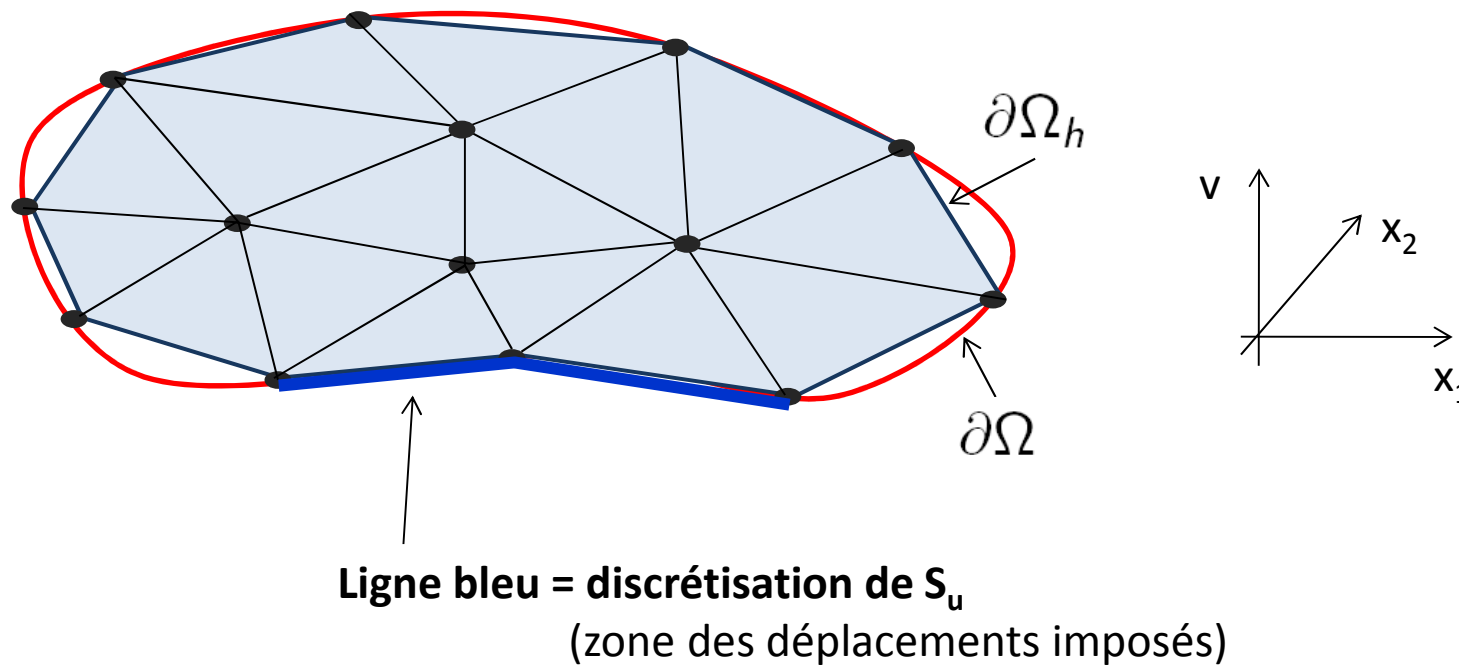
1. Ω_h tend vers Ω quand $h \rightarrow 0$
2. $\Omega_h = \Omega$ si Ω à bord droit par morceau

Décomposition de Ω en des **éléments** triangulaire (sans recouvrement) partageant entre eux des **noeuds**

== > Construction de Ω_h

Maillage

Le maillage est construit en prenant en compte le problème à résoudre (conditions aux limites ...)



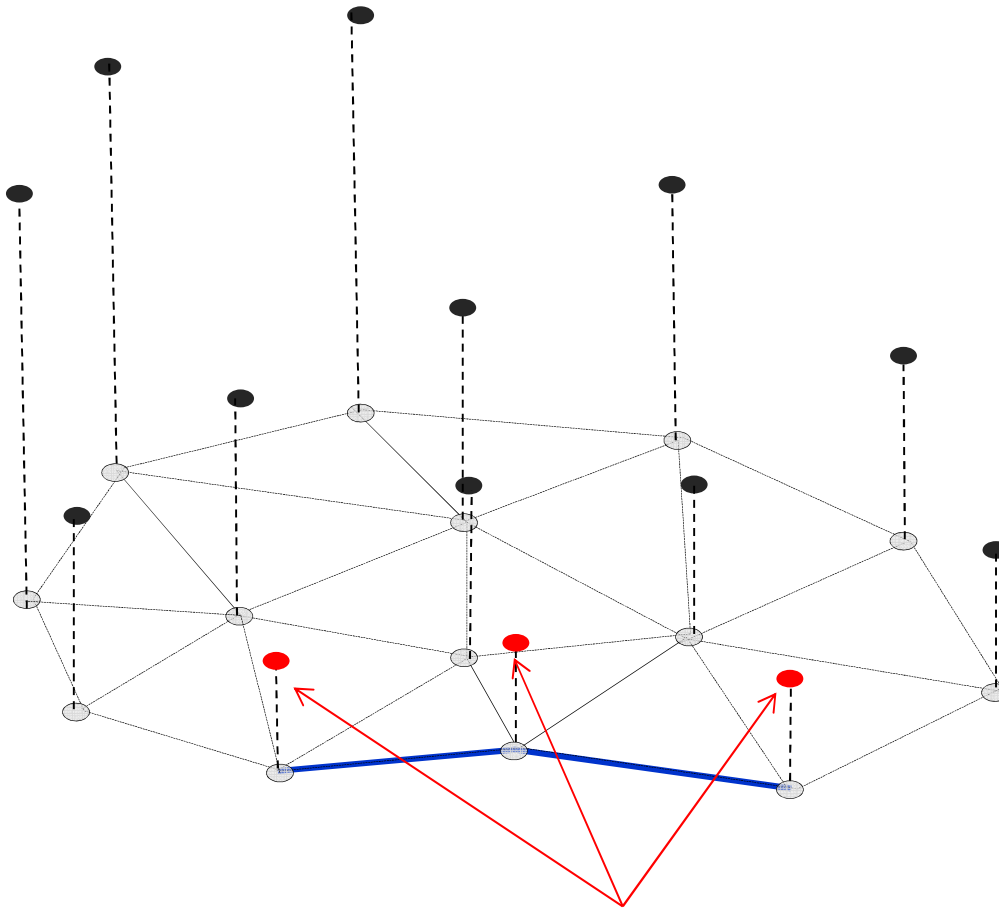
Maillage & Interpolation d'un champ scalaire

Considérons donc un **champ scalaire**

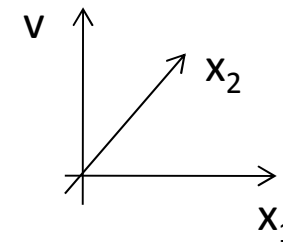
Exemple :

- *une composante du champ de déplacement,*
- *le champ de température*
- ...

On dessine les “valeurs nodales” du champ



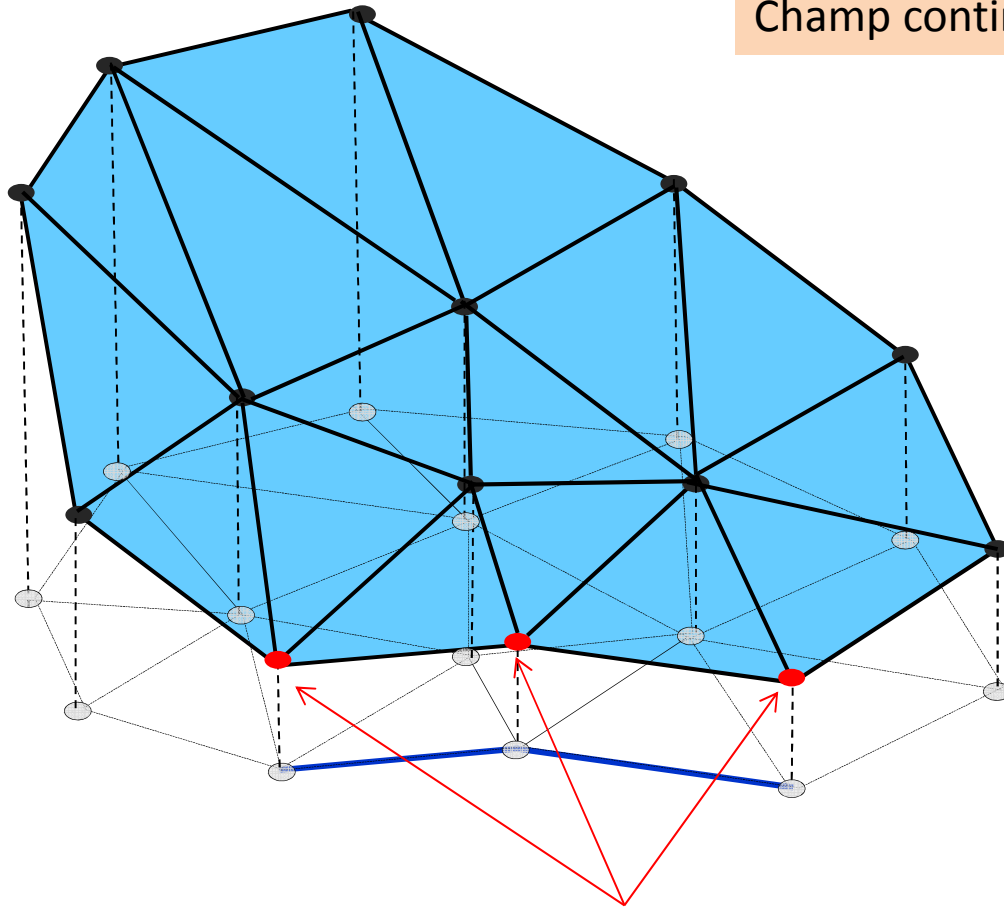
Valeurs nodales imposées (connue sur S_u)



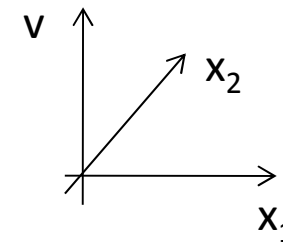
Maillage & Interpolation d'un champ scalaire

... puis interpolation linéaire sur chaque élément

Champ continu



La surface polygonale bleue représente un **champ cinématiquement "admissible"**

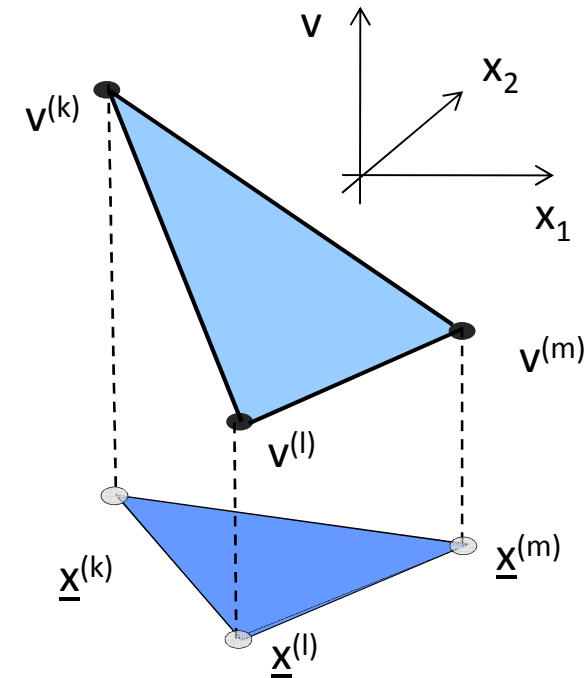
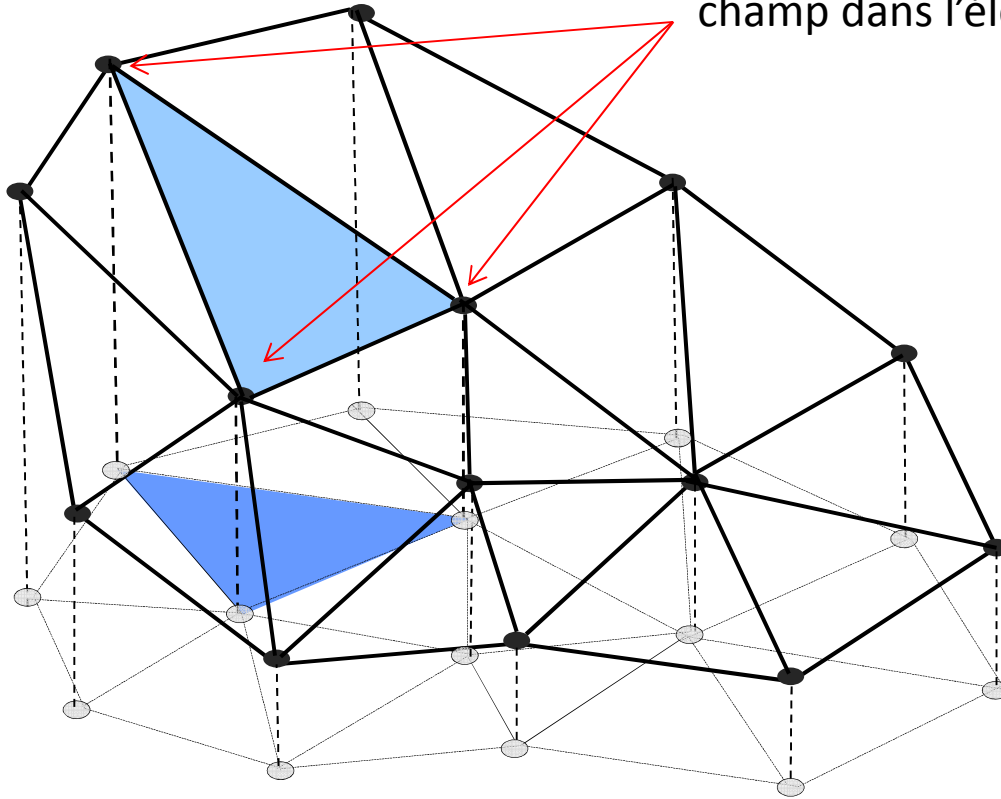


Valeurs nodales imposées (connue sur $S_{\underline{u}}$)

(imposition approchée des conditions aux limites en déplacement)

Interpolation locale

Les trois valeurs nodales définissent complètement le champ dans l'élément



- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$v_h(\underline{x}) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \iff v_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)v^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)v^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)v^{(m)}$$

C'est seulement une façon particulière d'écrire un champs linéaire!

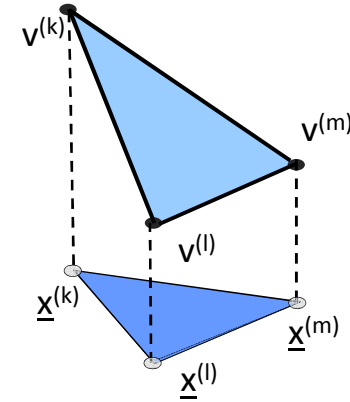
Interpolation locale

- le champ de déplacement est **continu**
- sa restriction sur chaque triangle est **linéaire** et dépend seulement des **valeurs nodales**

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = N_k(x_1, x_2)\underline{v}^{(k)} + N_\ell(x_1, x_2)\underline{v}^{(\ell)} + N_m(x_1, x_2)\underline{v}^{(m)}$$

N_k , N_l , et N_m sont appelées **fonctions de forme**, elles sont:

1. linéaire en (x_1, x_2)
2. satisfont la propriété «du Kronecker»: $\mathbf{N}_k(\underline{x}^{(l)}) = \delta_{kl}$



Les fonctions de forme s'écrivent sous la forme:

$$N_p(x_1, x_2) = c_0^{(p)} + c_1^{(p)}x_1 + c_2^{(p)}x_2 \quad (p = k, \ell, m)$$

Les coefficients $c_0^{(p)}$, $c_1^{(p)}$ et $c_2^{(p)}$ dépendent uniquement des coordonnées $(x_1^{(p)}, x_2^{(p)})_{p=k,l,m}$ des noeuds de l'éléments

Remarque :

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{v}_h]$ associé à est **constant** sur l'élément T

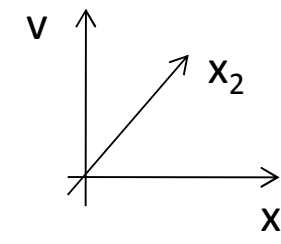
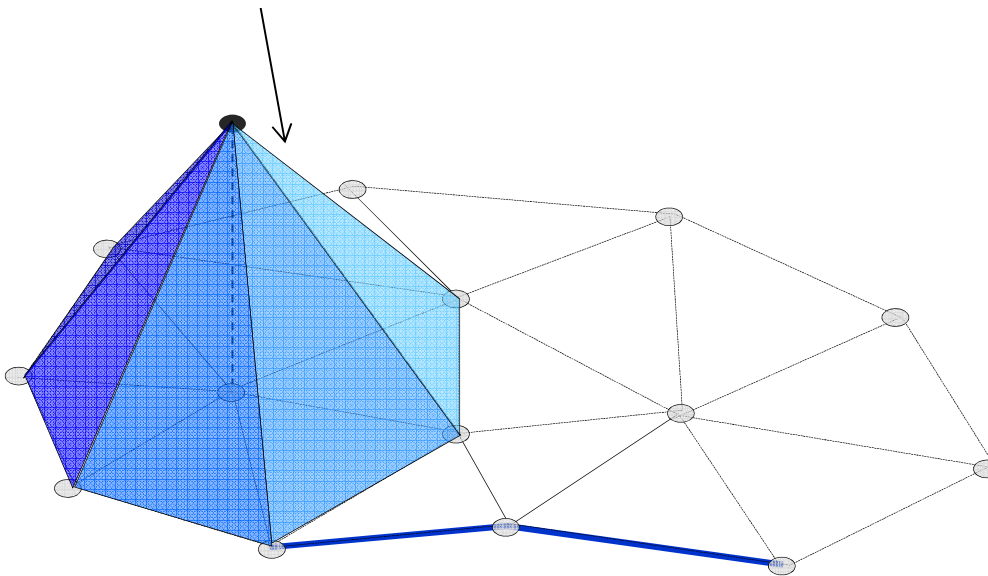
== > conséquence directe de l'interpolation linéaire

Interpolation globale

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}$$

Fonctions de forme globales sont les fonctions de bases de l'espace d'approximation

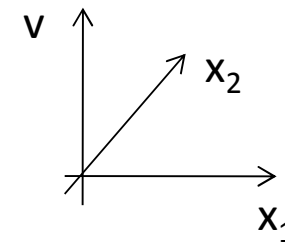
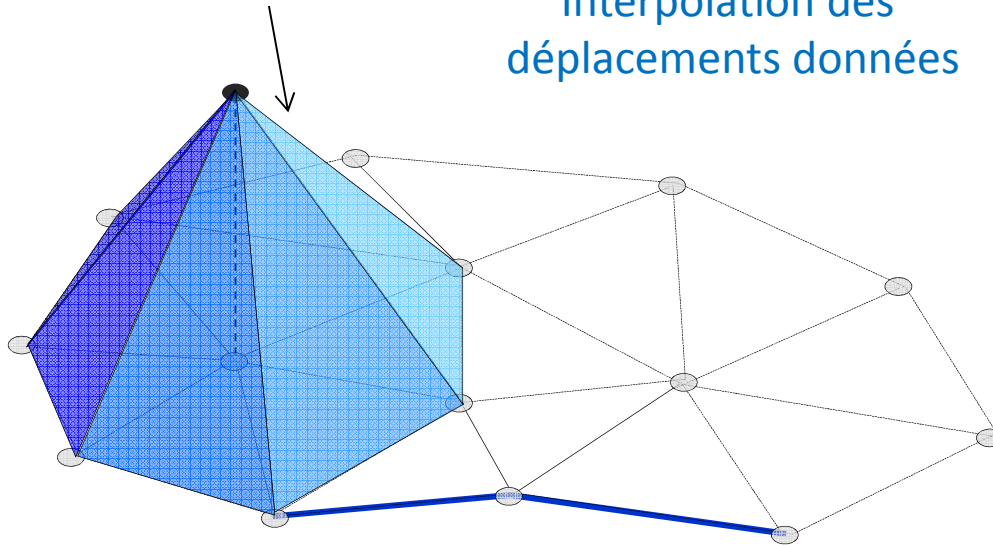


Interpolation globale

Approximation globale: forme spécifique de la **méthode de Galerkin** avec:

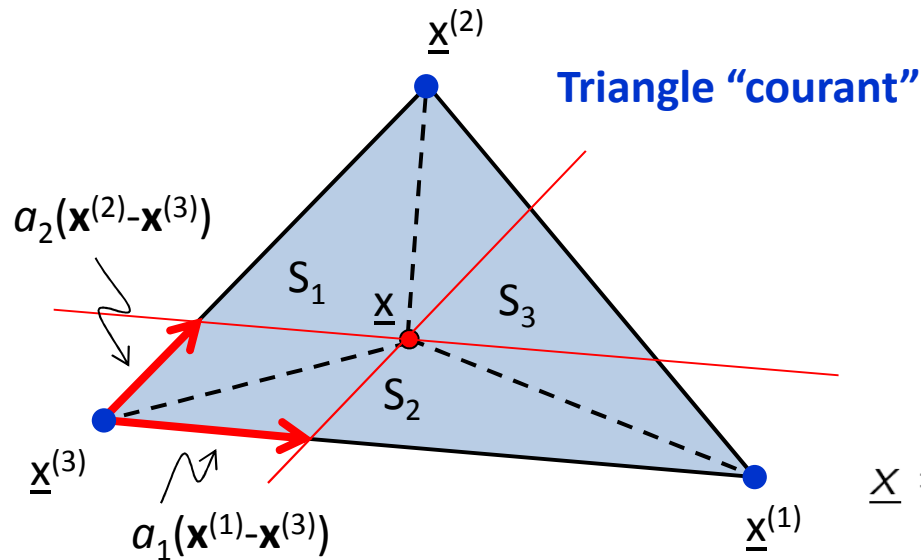
$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} = \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \in S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{u}^D(\underline{x}^{(n)})}_{\underline{u}_h^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} + \underbrace{\sum_{n | \underline{x}^{(n)} \notin S_u} \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)}}_{\alpha_K = v_j^{(n)}, \varphi^K(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x}) \underline{e}_j}$$

Fonctions de forme globales
Interpolation des déplacements données
Interpolation des déplacements inconnues



- Le domaine d'analyse est le domaine "discrétisé" Ω_h
- $\underline{v}_h \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D)$: **cinématiquement admissible** au sens de l'approximation ainsi définie (EF)

Vers le concept d'éléments isoparamétrique



$$a_1 = \frac{S_1}{S} \quad a_2 = \frac{S_2}{S} \quad a_3 = \frac{S_3}{S}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Coordonnées d'aire

$$\underline{x} = \underline{x}^{(3)} + a_1(\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(3)}) + a_2(\underline{x}^{(2)} - \underline{x}^{(3)})$$



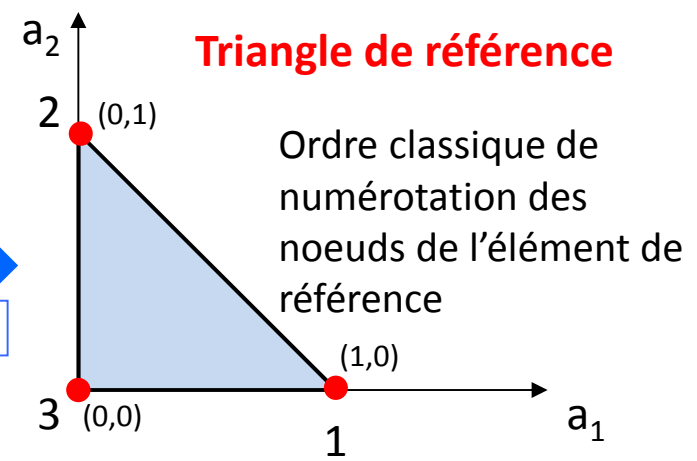
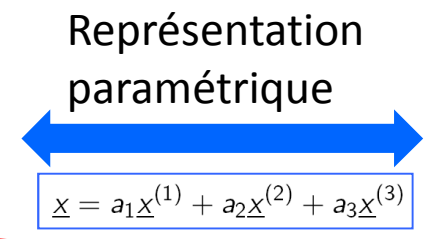
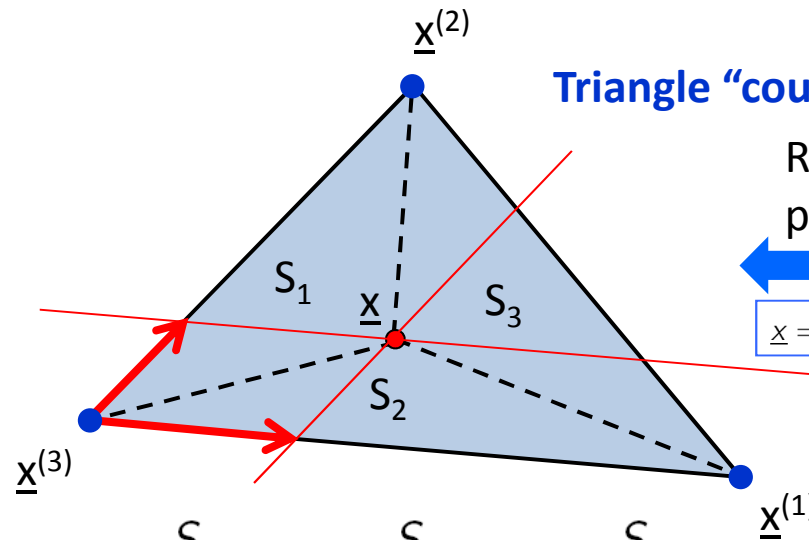
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{x} = a_1 \underline{x}^{(1)} + a_2 \underline{x}^{(2)} + a_3 \underline{x}^{(3)}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} x_2^{(2)} & x_2^{(23)} & x_1^{(32)} \\ x_1^{(3)} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} x_2^{(3)} & x_2^{(31)} & x_1^{(13)} \\ x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)} & x_2^{(12)} & x_1^{(21)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Les coordonnées d'aires coïncide avec les fonctions de forme linéaires ($\mathbf{a}_i = \mathbf{N}_i$)

Vers le concept d'éléments isoparamétrique



$$a_1 = \frac{S_1}{S} \quad a_2 = \frac{S_2}{S} \quad a_3 = \frac{S_3}{S}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\underline{x} = a_1 \underline{x}^{(1)} + a_2 \underline{x}^{(2)} + a_3 \underline{x}^{(3)}$$

Représentation du **triangle de référence** sur le **triangle "courant"** en utilisant les coordonnées d'aire.

Existence d'une telle représentation pour tout triangle "courant" vers le même triangle de référence.

Les **noeuds (rouge)** de l'éléments de référence sont les images des **noeuds (bleu)** du triangle "courant" définis par l'utilisateur.

Représentation linéaire -> 3 paramètres -> 3 noeuds

Puisque les coordonnées d'aire coïncident avec les fonctions de forme:

$$\underline{v}_h = a_1 \underline{v}^{(1)} + a_2 \underline{v}^{(2)} + a_3 \underline{v}^{(3)}$$

ISO-paramétrique
(géométrie et déplacement)

Chapitre 2: Éléments finis isoparamétriques

1. Exemple : déformation plane – élément linéaire triangulaire
- 2. Éléments finis isoparamétriques**
3. Maillage – Maillage conforme - Régularité
4. Structure de données – code octave/matlab

Le concept d'éléments finis isoparamétriques

L'approche précédente (linéaire, élément triangulaire)

- est limité aux déformations planes
- conduit à des contraintes et déformation constante par morceau

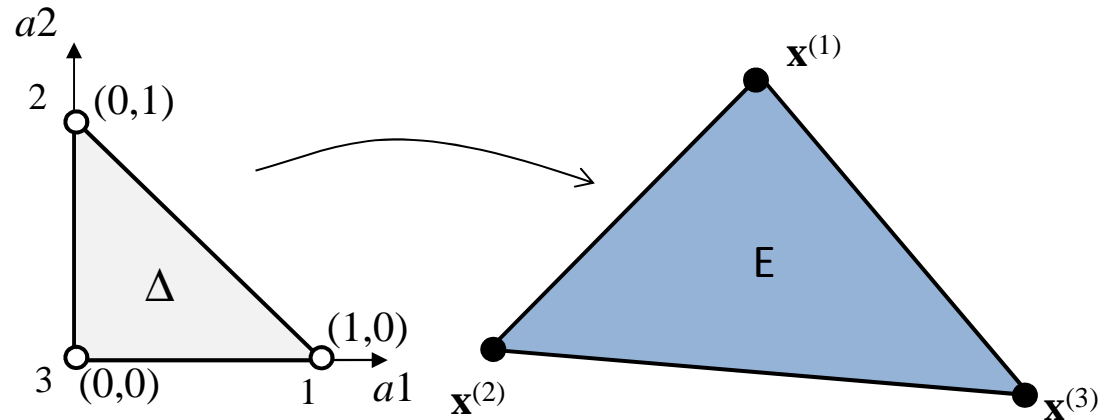
On souhaite s'intéresser à une généralisation pour pouvoir traiter :

- problèmes 3D
- interpolation des déplacement plus "riche"
- meilleure représentation des frontières non planes

Une généralisation possible = ***les éléments isoparamétriques***

Les éléments isoparamétrique sont présents dans tous les codes EF commerciaux

Éléments finis isoparamétriques



Les éléments finis isoparamétriques sont définis par une application d'un élément (de référence Δ) de taille et de forme normalisées, défini dans l'espace paramétrique, sur l'élément réel E dans l'espace physique

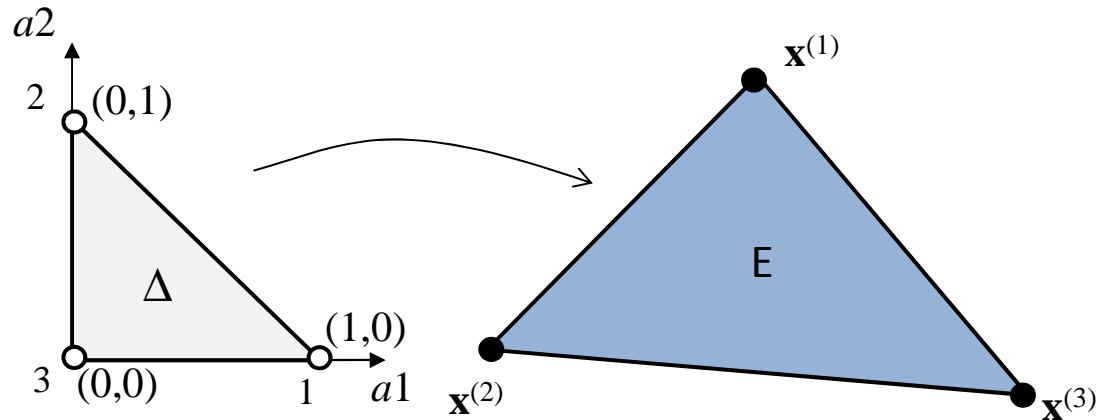
Et utilisent les mêmes fonctions de forme pour représenter la géométrie (\mathbf{x})

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{k=n_e} N_k(\mathbf{a}) \mathbf{x}^k \quad ; \quad \mathbf{x} \in E, \mathbf{a} \in \Delta$$

et le champ inconnu ($\mathbf{v}(\mathbf{x})$)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{k=n_e} N_k(\mathbf{a}) \mathbf{v}^k \quad ; \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in E$$

Éléments finis isoparamétriques



Notation pratique
(pour la programmation)

$$\{\underline{x}\} = [N(\underline{a})]\{X_e\} \quad \{v_h(\underline{x})\} = [N(\underline{a})]\{\mathbb{V}_e\}$$

$$\{v_h\} = \{v_1, v_2, \dots, v_D\}^T$$

$$\{\mathbb{V}_e\} = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_D^{(1)}, \dots, v_D^{(n_e)}\}^T$$

$$[N(\underline{a})] = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & 0 & \dots & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & \dots & 0 & 0 & N_{n_e}(\underline{a}) \end{bmatrix}}_{D(= 3) \times n_e \text{ columns}} \quad (D(= 3) \text{ lines})$$

D = dimension du problème

Éléments finis isoparamétriques

Calcul du gradient du champ de déplacement

On a (éléments isoparamétriques)

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad \underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)}$$
$$\{\underline{x}\} = [N(\underline{a})]\{X_e\} \quad \{\underline{v}_h(\underline{x})\} = [N(\underline{a})]\{V_e\}$$

Par définition : $d\mathbf{v}_h = \nabla \mathbf{v}_h \cdot d\mathbf{x}$

Coodonnées paramétriques:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad d\mathbf{v}_h = \mathbf{J}[\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{a} \quad \mathbf{J}[\mathbf{v}]_{ij} = \frac{\partial v_{h,i}}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\mathbf{a}) v_i^{(k)}$$

Soit finalement $\nabla \mathbf{v}_h = \mathbf{J}[\mathbf{v}](\mathbf{a}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{a})$

Et la linéarité de l'expression $\mathbf{J}[\mathbf{v}]$ par rapport à \mathbf{v} implique

$$\{\nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x})\} = [G_V(\mathbf{a})]\{V_e\} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in E_e$$

A expliciter pour chaque élément

Tenseur des déformations – Tenseur des contraintes

$$\{\nabla v_h(\mathbf{x})\} = [G_V(\mathbf{a})]\{V_e\} \text{ pour tout } x \in E_e$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}^T$$

- ❑ Tenseur des déformations

$$\{\varepsilon[v_h]\} = [B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Loi de comportement

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}$$

- ❑ Tenseur des contraintes

$$\{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} = [A][B_e(\underline{a})]\{V_e\}$$

- ❑ Densité d'énergie de déformation

$$\sigma : \varepsilon = \varepsilon : \mathbf{A} : \varepsilon = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \{V_e\}^T [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] \{V_e\}$$

Cas isotrope (3D)

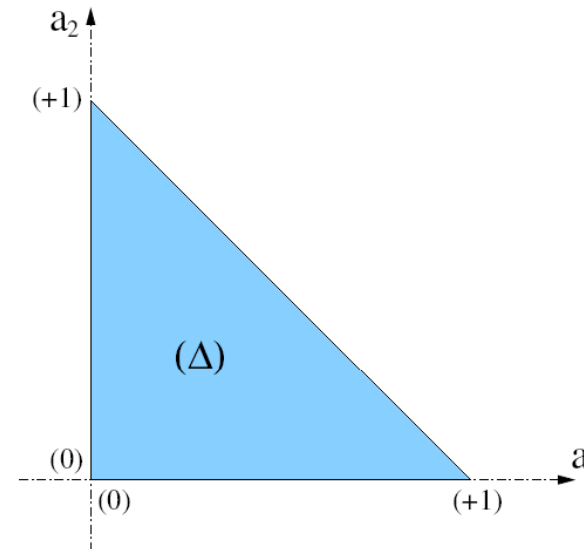
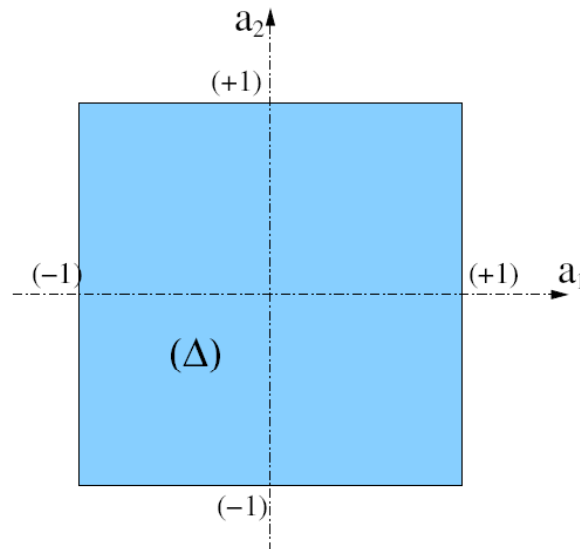
$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Quelques éléments de références classiques

unit segment ($D=1$): $\Delta = \{a \mid -1 \leq a \leq 1\}$

▶ **unit square** ($D=2$): $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid -1 \leq a_1, a_2 \leq 1\}$;

▶ **unit triangle** ($D=2$): $\Delta = \{(a_1, a_2) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0\}$;



▶ **unit cube** ($D=3$): $\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid -1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\}$;

▶ **unit tetrahedron** ($D=3$):

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2, a_3) \geq (0, 0, 0), 1 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0\}.$$

▶ **unit prism** ($D=3$):

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) \mid (a_1, a_2) \geq (0, 0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0, -1 \leq a_3 \leq 1\}.$$

Quelques éléments classiques (1D)

La liste n'est pas exhaustive ...

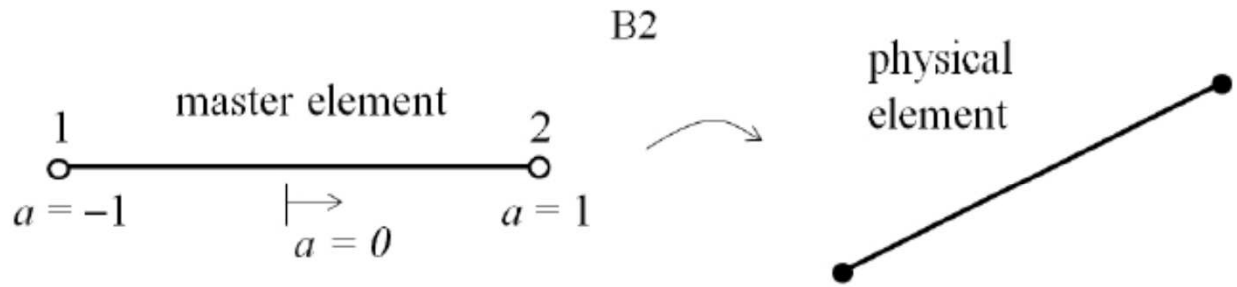
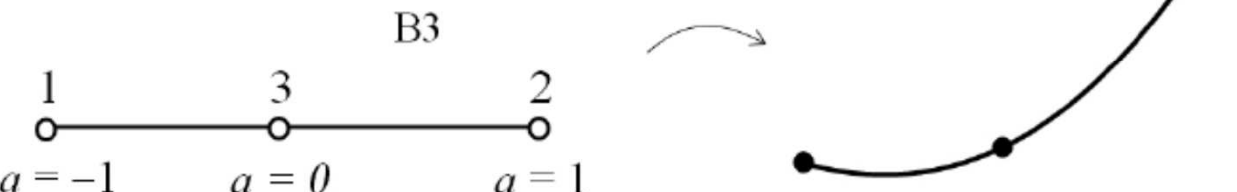
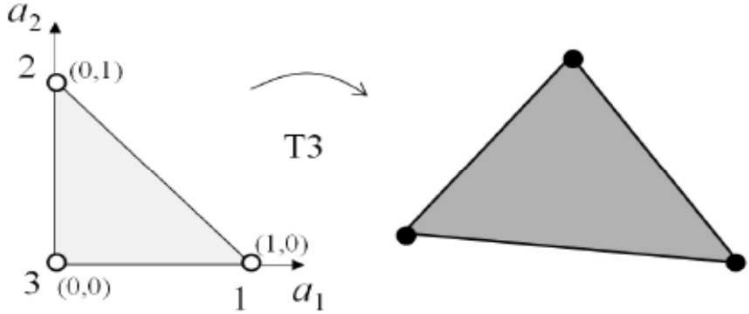
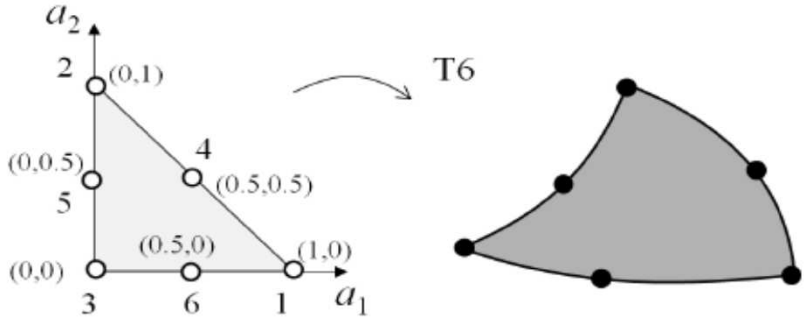
Master and physical elements	Shape functions
<p style="text-align: center;">B2</p>  <p>Diagram showing a master element (B2) with nodes 1 and 2 at $a = -1$ and $a = 1$ respectively. An arrow points to a physical element with nodes at $a = 0$ and $a = 1$.</p>	$N_1 = \frac{1}{2}(1 - a)$ $N_2 = \frac{1}{2}(1 + a)$
<p style="text-align: center;">B3</p>  <p>Diagram showing a master element (B3) with nodes 1, 3, and 2 at $a = -1$, $a = 0$, and $a = 1$ respectively. An arrow points to a physical element with nodes at $a = 0$, $a = 1$, and $a = 2$.</p>	$N_1 = \frac{1}{2}a(1 - a)$ $N_2 = \frac{1}{2}a(1 + a)$ $N_3 = 1 - a^2$

Table 2.1: Examples of standard one-dimensional finite elements.

Quelques éléments classiques (2D)

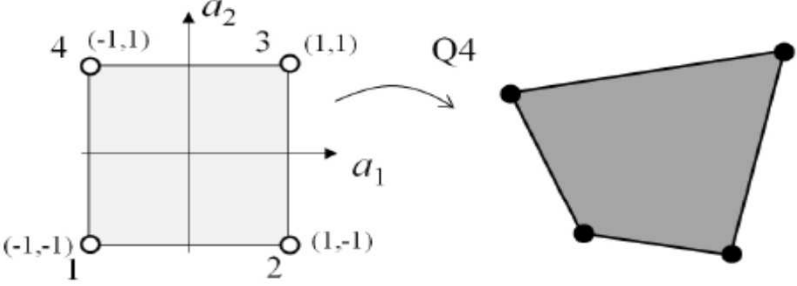
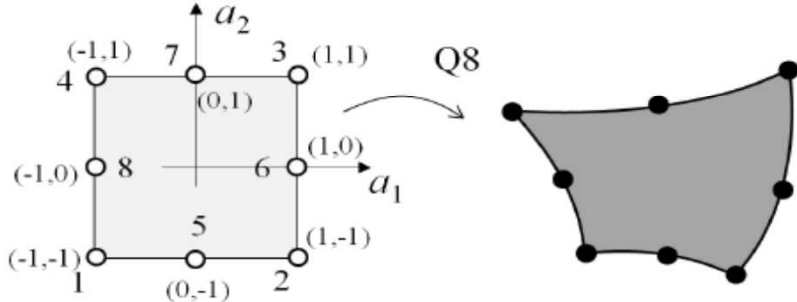
La liste n'est pas exhaustive ...

Master and physical elements	Shape functions
	$N_1 = a_1$ $N_2 = a_2$ $N_3 = 1 - a_1 - a_2$
	$N_1 = a_1(2a_1 - 1)$ $N_2 = a_2(2a_2 - 1)$ $N_3 = (1 - a_1 - a_2)(1 - 2a_1 - 2a_2)$ $N_4 = 4a_1a_2$ $N_5 = 4a_2(1 - a_1 - a_2)$ $N_6 = 4a_1(1 - a_1 - a_2)$

REMARQUE: si une fonction de forme s'annule en tous les noeuds d'une arête,
elle s'annule sur l'arête entière

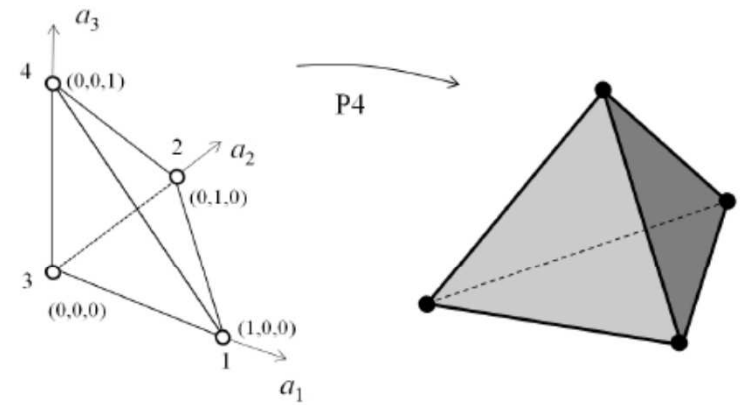
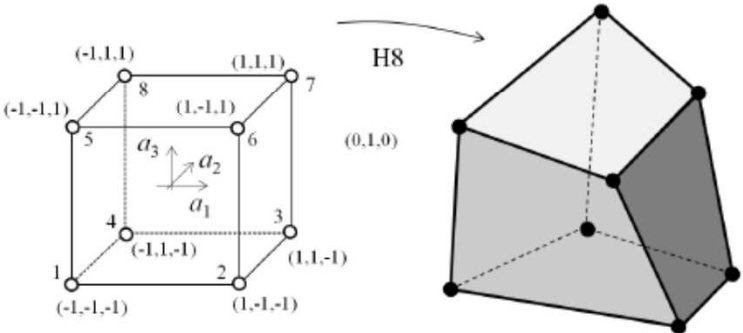
Quelques éléments classiques (2D)

La liste n'est pas exhaustive ...

Master and physical elements	Shape functions
	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)$ $N_3 = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)$
	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 - a_2)(-1 - a_1 - a_2)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 - a_2)(-1 + a_1 - a_2)$ $N_3 = \frac{1}{4}(1 + a_1)(1 + a_2)(-1 + a_1 + a_2)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1 - a_1)(1 + a_2)(-1 - a_1 + a_2)$ $N_5 = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 - a_2)$ $N_6 = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 + a_1)$ $N_7 = \frac{1}{2}(1 - a_1^2)(1 + a_2)$ $N_8 = \frac{1}{2}(1 - a_2^2)(1 - a_1)$

Quelques éléments classiques (3D)

La liste n'est pas exhaustive ...

Master and physical elements	Shape functions
	$N_1(a_1, a_2, a_3) = a_1$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = a_2$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = a_3$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = 1 - a_1 - a_2 - a_3$
	$N_1(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)$ $N_2(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 + 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)$ $N_3(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 - 1)$ $N_4(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 - 1)(a_2 + 1)(a_3 - 1)$ $N_5(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 + 1)$ $N_6(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 - 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)$ $N_7(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)$ $N_8(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{8}(a_1 + 1)(a_2 - 1)(a_3 + 1)$

Quelques propriétés

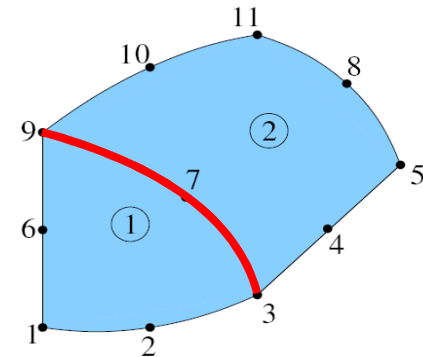
Représentation exacte des noeuds, à savoir,
$$x^l = \sum_{k=1}^{k=n_e} N_k(\underline{a}^l) x^k$$

assurée par la propriété du « kronecker » que satisfont les fonctions formes

$$N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}$$

Représentation des faces et arrêtes

→ raccord conforme de la géométrie
Exemple raccord : T6 - Q8 ou T6 - B3 ...



Propriété de « Partition de l'unité » des fonctions de formes

$$\sum_{k=1}^{k=n_e} N_k(\underline{a}) = 1$$

Partition de l'unité : une propriété intéressante ...

Représentation exacte des champs affines

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underbrace{\{ \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \}}_{\underline{v}^{(k)}}$$

Pour garantir que si, $\underline{v}^{(k)} = \underline{A} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{b} \implies \underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}$

Il est nécessaire et suffisant que les fonctions de forme satisfasse $\sum_{k=1}^{k=n_e} N_k(\underline{a}) = 1$

Ainsi, si les valeurs nodales des déplacement sont compatible avec celles d'un champ linéaire, l'interpolation représentera correctement le champ linéaire sur tout l'élément

En particulier pour un mouvement de corps rigide infinitésimal, on aura :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \left[[N(\underline{a})] \{ \underline{\underline{V}}_e^{\text{rigid}} \} \right] = \underline{\underline{0}}$$

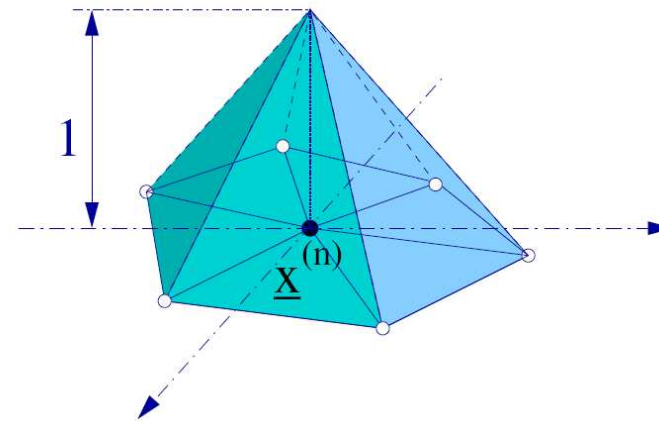
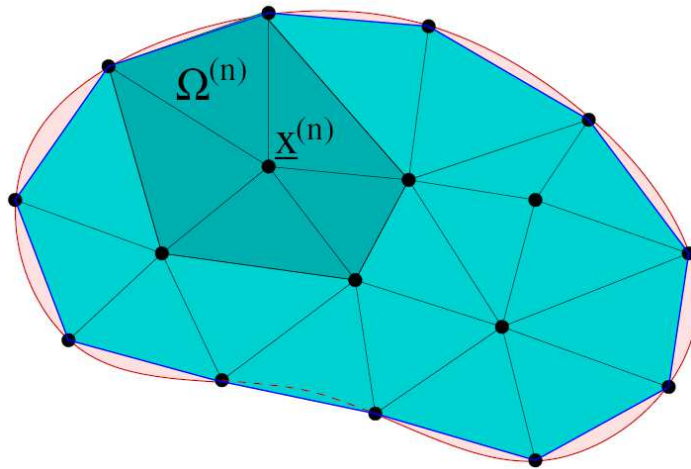
Représentation globale du déplacement & champ virtuel

Interpolation globale du déplacement inconnu $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^{(D)})$

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underbrace{[\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{U}\}}_{\underline{u}_h^{(0)}(\underline{x})} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champ virtuel $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$:

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{W}\}$$



Synthèse : Éléments finis isoparamétriques

Représentation locale (niveau de l'éléments) $\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad \underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)}$

$$\boxed{\begin{aligned} \{\underline{x}\} &= [N(\underline{a})]\{X_e\} \\ \{\underline{v}_h(\underline{x})\} &= [N(\underline{a})]\{V_e\} \end{aligned}} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \{\varepsilon[\underline{v}_h]\} = [B_e(\underline{a})]\{V_e\} \\ \{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\} = [A][B_e(\underline{a})]\{V_e\} \end{cases}$$

Représentation globale

Interpolation globale du déplacement inconnu $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^{(D)})$

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j)>0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j)\leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underbrace{[\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{U}\}}_{\underline{u}_h^{(0)}(\underline{x})} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champ virtuel $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$:

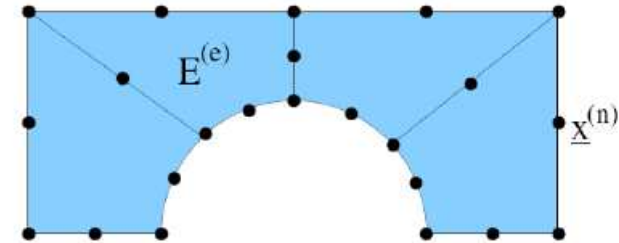
$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j)>0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbf{W}\}$$

Chapitre 2: Éléments finis isoparamétriques

1. Exemple : déformation plane – élément linéaire triangulaire
2. Éléments finis isoparamétriques
- 3. Maillage – Maillage conforme - Régularité**
4. Structure de données – code octave/matlab

Maillage

Cas général: $\Omega \subset \mathbb{R}^D$
($D=3$; $D=2$ en déformation plane ou contrainte plane)

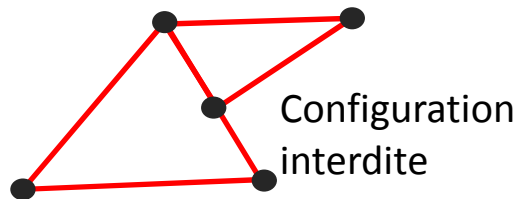


- + Ω est partitionné en N_E **éléments** $E^{(e)}$ ($1 \leq e \leq N_E$) qui peuvent être mis en relation avec un élément de référence de forme géométrique simple
 - triangle ou carré
 - cubes, tétraèdre, pentaèdre (3D)
- + $E^{(e)}$ est le support géométrique d'un **élément fini**
- + Choix des **noeuds** N_N points $x(n)$ ($1 \leq n \leq N_N$) de Ω

Utilisation de codes dédiés :
exemple gmsh ..

Le choix des noeuds et leur emplacement *n'est pas arbitraire* mais doit reproduire l'un des éléments standart disponibles (i.e. chaque sommet est un noeud,)

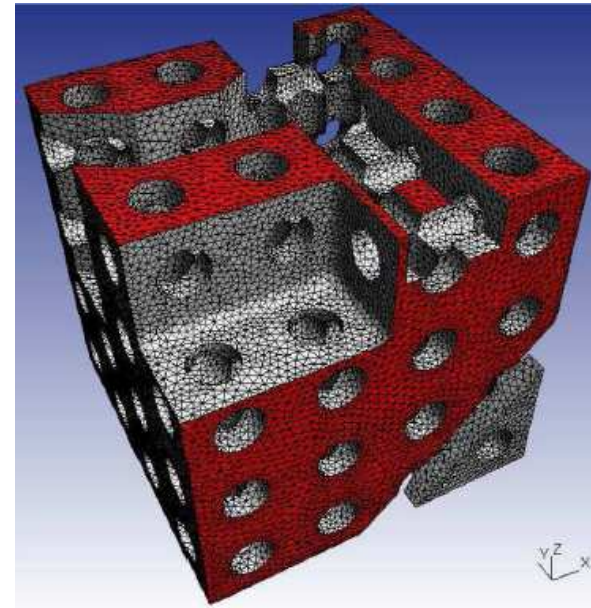
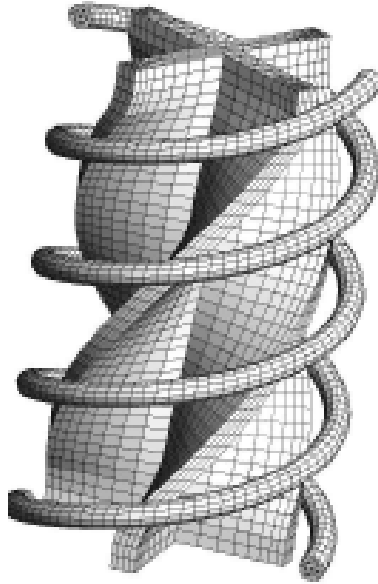
Typiquement, **les noeuds frontière sont choisis tout d'abord de sorte que les frontières discrétisées coïncide avec les "vrais" frontières aux noeuds** en question (et seulement là en règle générale). Ensuite, les noeuds dans le domaine sont choisis de sorte à générer une partition uniforme (éléments non dégénérés)



Intersection entre 2 éléments :

- intersection vide
- un sommet en commun
- une arête en commun

Exemple de maillage

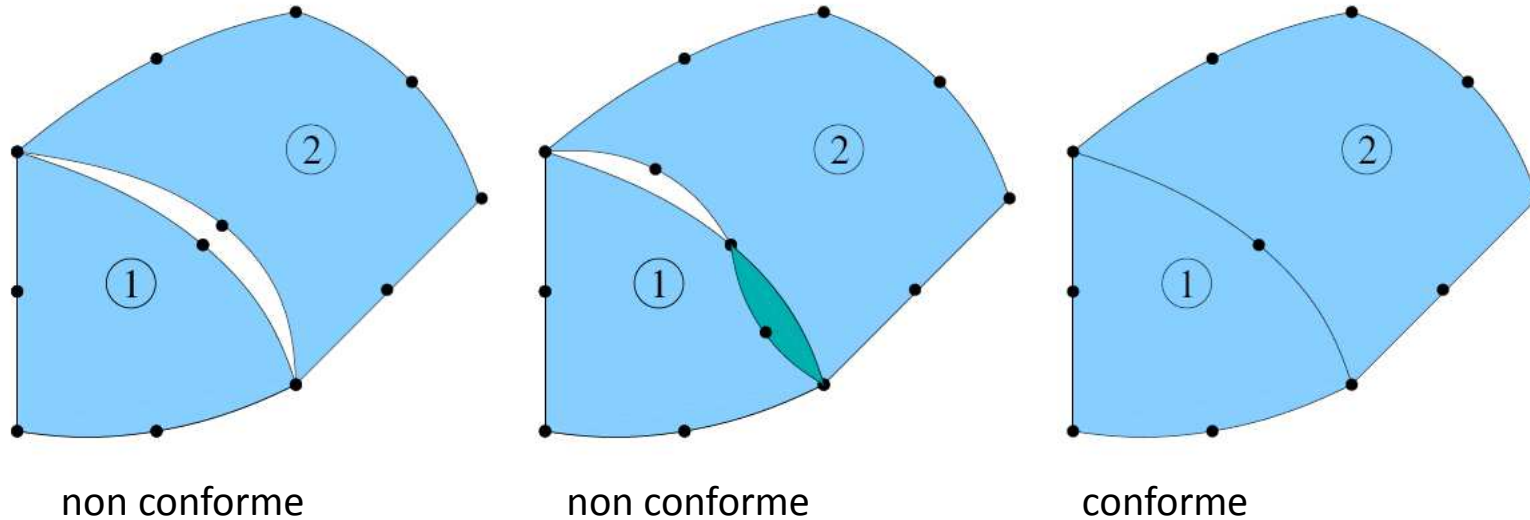


© <http://www.geuz.org/gmsh/>
(mailleur)

Exemple de ce que l'on peut faire avec gmsh

Maillage conforme

Deux éléments voisins ne doivent pas se recouvrir ni créer de trous aux interfaces.



Si des éléments isoparamétriques sont utilisés, ceci est garanti si deux éléments sont:

- **disjoints**
ou ont en commun
- **un noeud**
- **une arête**, et dans ce cas, s'ils ont le **même nombre** de noeuds (aux **même positions**) sur l'arête commune

C'est l'intérêt fondamental des éléments isoparamétriques

Régularité d'un maillage conforme

$$E \ni \underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{a} \in \Delta)$$

doit être une application bijective de l'élément de référence Δ sur l'élément "courant" E

Matrice Jacobien :

$$[J(\underline{a})] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right]_{1 \leq i, j \leq D} \quad \text{with} \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial N_k}{\partial a_j}(\underline{a}) x_i^{(k)}$$

Condition: le déterminant J de $[J]$ doit être continu et ne jamais s'annuler sur Δ

- Pour un élément donnée, la condition J non nul impose des restrictions sur la position et le nombre de noeuds

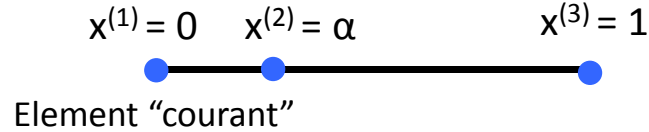
- Le cas $J = 0$ apparait ... c'est le signal d'un problème (déformation trop grande, inter-pénétrations, etc)

A vérifier pendant l'opération de maillage!!!

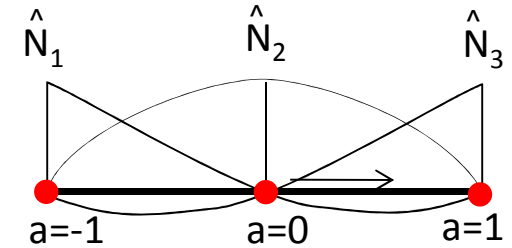
Enfin, l'élément différentiel de volume s'écrit :

$$dV(\underline{x}) = J(\underline{a}) dV(\underline{a}) \quad J \text{ est une fonction polynomiale de } \underline{a}$$

Exemple: Élément ligne à 3-noeuds (B3)



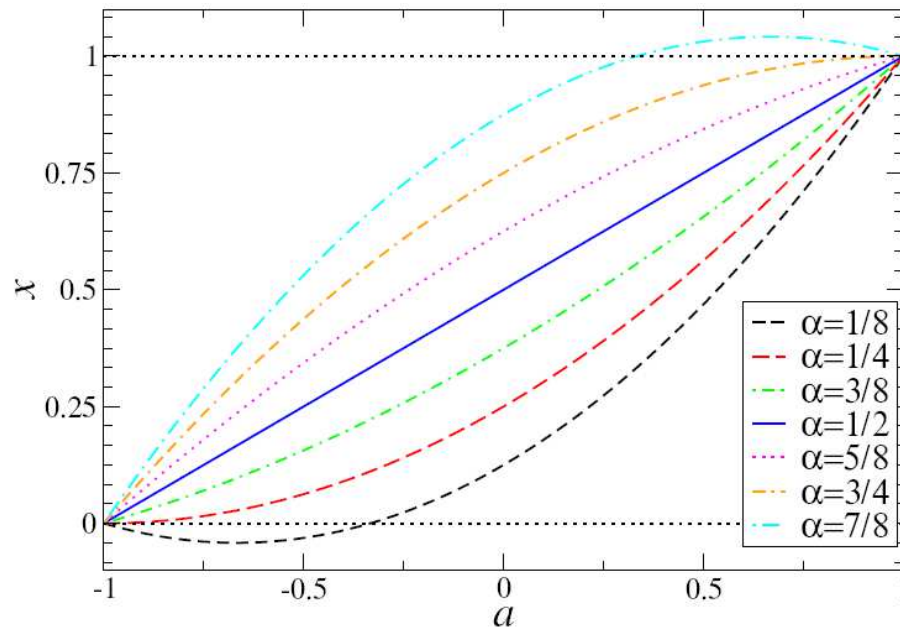
Représentation paramétrique



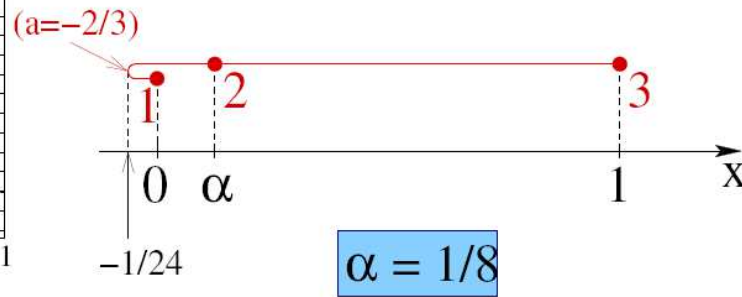
$$x = \hat{N}_1(a) \times 0 + \hat{N}_2(a) \times \alpha + \hat{N}_3(a) \times 1 \quad (a \in \Delta = [-1, 1])$$

$$\hat{N}_1(a) = a(a - 1)/2, \quad \hat{N}_2(a) = 1 - a^2, \quad \hat{N}_3(a) = a(a + 1)/2$$

($\hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{N}_3$: lagrangian polynomials with $a = -1, 0, 1$)



jacobien $J(a) = (1 - 2\alpha)a + 1/2$
garde un signe constant si $1/4 < \alpha < 3/4$



Chapitre 2: Éléments finis isoparamétriques

1. Exemple : déformation plane – élément linéaire triangulaire
2. Éléments finis isoparamétriques
3. Maillage – Maillage conforme - Régularité
4. **Structure de données – code octave/matlab**

Maillage: structure de données - code octave / matlab

- Table de coordonnées des noeuds (N_N lignes, D colonnes)

$$\mathit{nodes}(n).\mathit{coor}(j) = x_j^{(n)} : j^{\text{ème}} \text{ coordonnée du noeud « n » (numérotation globale)}$$

- Table de connectivité des éléments (N_E lignes, n_e colonnes)

$$\mathit{elements}(e).\mathit{nodes}(1:n_e) = \text{liste des noeuds de l'élément "e"} \\ (n_e: \text{nb de noeuds de l'élément})$$

== > cette table nous donne la correspondance entre **numérotation locale** et **numérotation globale** des noeuds d'un éléments

$$\mathit{elements}(e).\mathit{nodes}(k) = \text{numéro global du noeud k (numérotation locale)}$$

- Table de numérotation des "degrés de liberté" (N_N lignes, D colonnes)

$$\mathit{nodes}(n).\mathit{dof}(j) = \text{numéro du "degré de liberté" de la composante "j" du champ de déplacement du noeud global "n"}$$

nodes.coor
nodes.dof
nodes.displ

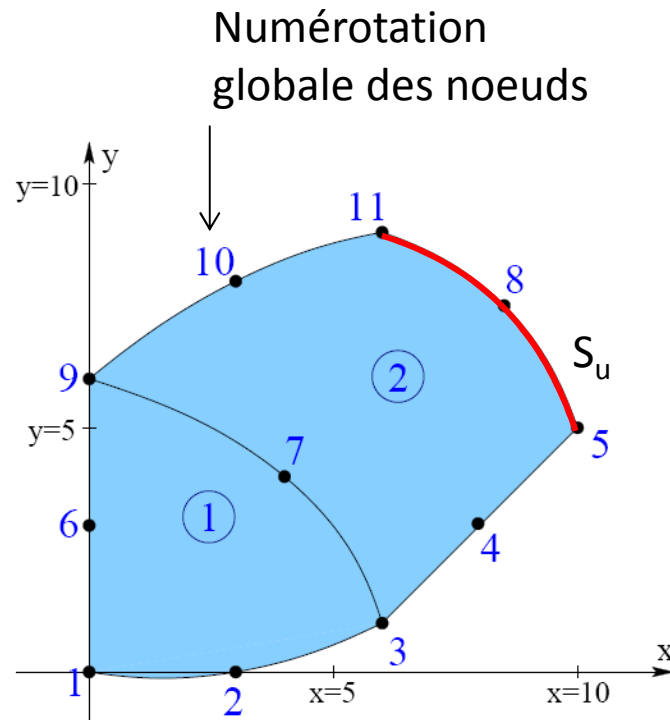
Convention : $l = \mathit{nodes}(n).\mathit{dof}(j) > 0$ ($v_j^{(n)}$ inconnue)
 $l = \mathit{nodes}(n).\mathit{dof}(j) < 0$ ($v_j^{(n)}$ imposée)

elements.type
elements.mat
elements.nodes

Exemple

nodes.coor → coor

(node 1)	0	0
(node 2)	3	0
(node 3)	6	1
(node 4)	8	3
(node 5)	10	5
(node 6)	0	3
(node 7)	4	4
(node 8)	8,5	7,5
(node 9)	0	6
(node 10)	3	8
(node 11)	6	9



elements.nodes → connect

n_e	nodes								
(element 1)	6	3	9	1	7	6	2	×	×
(element 2)	8	3	5	11	9	4	8	10	7

nodes.dof

1	2
3	4
5	6
7	8
<0	<0
9	10
11	12
<0	<0
13	14
15	16
<0	<0

Liste global des valeurs nodales inconnues et valeurs nodales du champ virtuel (même ordre)

$$\{U\} = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_1^{(6)}, u_2^{(6)}, u_1^{(7)}, u_2^{(7)}, u_1^{(9)}, u_2^{(9)}, u_1^{(10)}, u_2^{(10)}\}^T$$

$$\{W\} = \{w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, w_1^{(4)}, w_2^{(4)}, w_1^{(6)}, w_2^{(6)}, \dots, w_1^{(10)}, w_2^{(10)}\}^T$$

Représentation globale du déplacement & champ virtuel

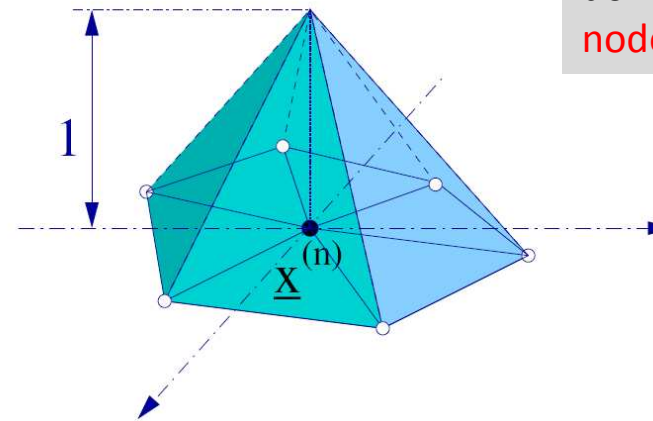
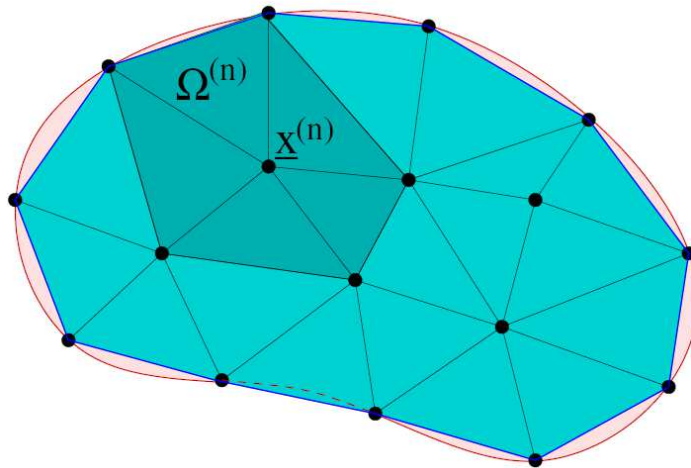
Interpolation globale du déplacement inconnu $\underline{u} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^{(D)})$

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j + \sum_{\text{dof}(n,j) \leq 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) u_j^D(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j = \underbrace{[\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{U}\}}_{\underline{u}_h^{(0)}(\underline{x})} + \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x})$$

Champ virtuel $\underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$:

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{\text{dof}(n,j) > 0} \tilde{N}_n(\underline{x}) w_j^{(n)} \underline{e}_j = [\tilde{N}(\underline{x})]\{\mathbb{W}\}$$

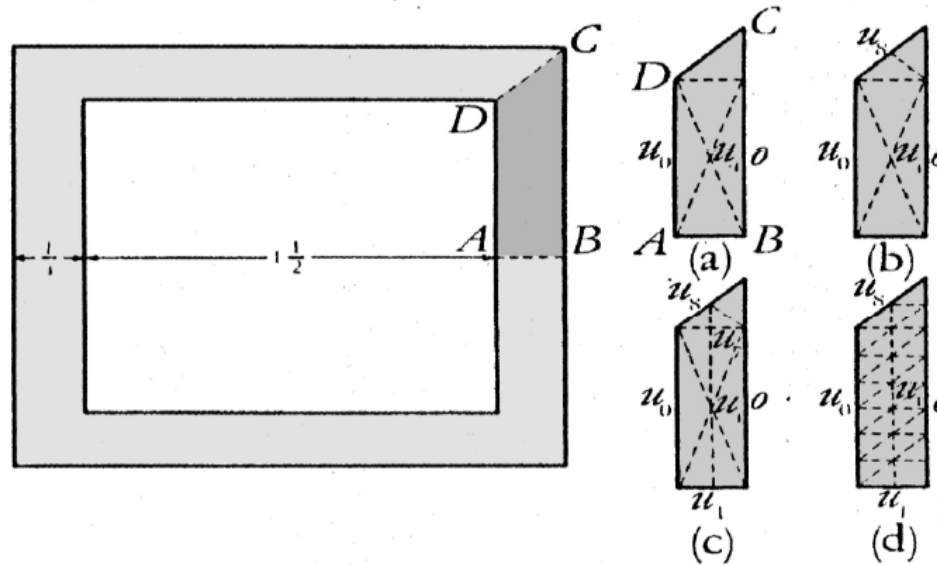
Même numérotation des valeurs nodales



Numérotation est donnée par la table `nodes.dof`

that's all folks

Premiers travaux sur
les éléments Finis



Torsion d'un tube: $\Delta\varphi = 0$ ($\varphi(x_1, x_2)$: fonction de gauchissement)

Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration,
Bull. Amer. Mathem. Soc., 49:1-23 (1943).