

SCHÉMAS D'INTÉGRATION TEMPORELLE POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech

5 octobre 2015

1 Motivations

On souhaite résoudre par une méthode numérique l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$$

où \mathbf{M} est une matrice symétrique définie positive, \mathbf{C} et \mathbf{K} sont des matrices symétriques. Toute équation du second ordre peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre, à l'aide d'un changement de variable.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

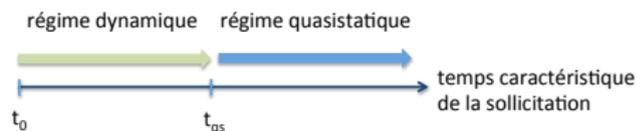
où \mathbf{D} est une matrice inversible.

L'inconvénient de ce type d'approche est de multiplier par deux la taille du système linéaire à résoudre dans les schémas implicites.

Il est donc intéressant de mettre en œuvre des méthodes numériques dédiées.

Temps caractéristiques

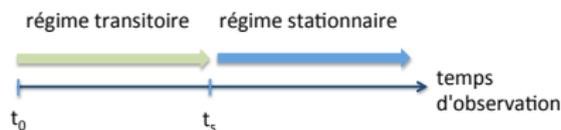
Pour les sollicitations périodiques, il existe un temps caractéristique d'évolution du chargement : $\frac{\|F\|}{\|\dot{F}\|}$. Si ce temps caractéristique est grand devant un temps caractéristique des effets de l'inertie, $\sqrt{\frac{1}{\|M^{-1} \cdot K\|}}$, alors le régime est quasi statique. La matrice M a une contribution négligeable dans la réponse du système.



Temps caractéristiques

En dynamique des structures, \mathbf{C} reçoit la contribution des phénomènes amortissant et gyroscopiques. En l'absence d'amortissement le système est dit conservatif.

Pour un système non conservatif, il existe une durée d'observation au-delà de laquelle \mathbf{q} est indépendant des conditions initiales. Il s'agit du régime stationnaire. Il est précédé par un régime transitoire.



Développement en série de Taylor :

$$f(t_{n+1}) = f(t_n) + \Delta t \dot{f}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{f}(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^{(s+1)}(\tau) (t_{n+1} - \tau)^s d\tau$$

avec $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Appliqué aux vitesses, pour $s = 0$, et aux déplacements, pour $s = 1$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) (t_{n+1} - \tau) d\tau$$

Autres développements en série de Taylor, en $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$, pour $\ddot{\mathbf{q}}(t)$:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + (t_n - \tau) \mathbf{q}^{(3)}(\tau) + o((t_n - \tau)) \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{q}}(\tau) + (t_{n+1} - \tau) \mathbf{q}^{(3)}(\tau) + o((t_{n+1} - \tau)) \quad (2)$$

La combinaison de $(1-\gamma)$ (1) + γ (2) donne pour $\ddot{\mathbf{q}}(\tau)$:

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{q}^{(3)}(\tau) (\tau - \gamma \Delta t - t_n) + o(\Delta t) \quad (3)$$

Pour la suite, en remplaçant γ par 2β on obtient :

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}(\tau) = (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{q}^{(3)}(\tau) (\tau - 2\beta \Delta t - t_n) + o(\Delta t) \quad (4)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \Delta t \ddot{\mathbf{q}}\left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2}\right) + o(\Delta t)$$

$$(3) \Rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{q}^{(3)}\left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \Delta t^2 + o(\Delta t^2)$$

En traitant de façon similaire $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) (t_{n+1} - \tau) d\tau$ on obtient :

$$(4) \Rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{\mathbf{q}}(\tau) (t_{n+1} - \tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \Delta t^3 \mathbf{q}^{(3)}(\tilde{\tau}) \left(\frac{1}{6} - \beta\right) + o(\Delta t^3)$$

où $\tilde{\tau} \in]t_n, t_{n+1}[$.

La méthode de Newmark est définie par l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\end{aligned}$$

où γ et β sont deux paramètres de la méthode.

Ces approximations viennent compléter l'équation différentielle en $t = t_{n+1}$:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}$$

On obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \\ \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{C} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n) - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n)\end{aligned}$$

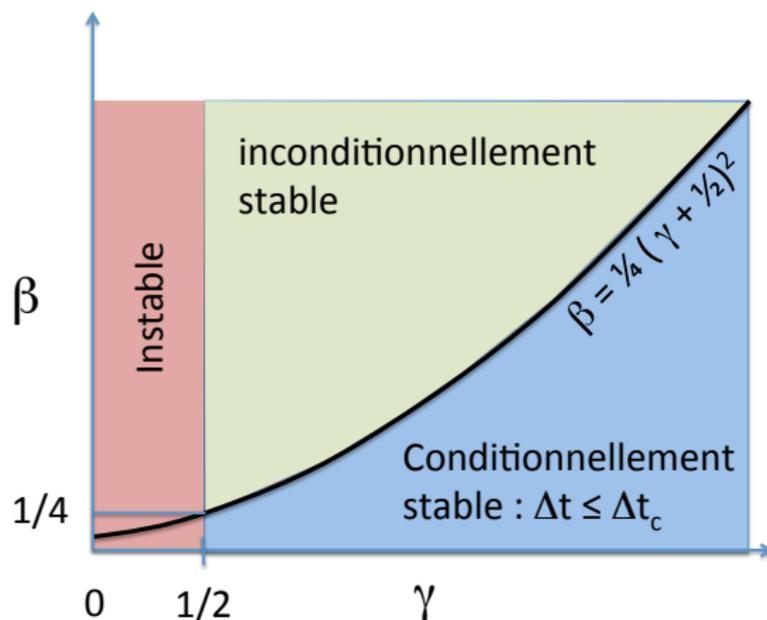
Pour les problèmes conservatifs ($\mathbf{C} = 0$), les propriétés suivantes sont vérifiées.

- Le schéma d'intégration est consistant.
- L'ordre de convergence de l'approximation est 1 dans le cas général.
- Le schéma est instable si $\gamma < \frac{1}{2}$.
- Si $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta \geq \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2$ le schéma est inconditionnellement stable.
- Si $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta < \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2$, le schéma est stable si $\Delta t \leq \Delta t_c$ avec :

$$\Delta t_c^2 = \frac{4}{\omega_{max}^2 ((\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta)}$$

où $\omega_{max} = \max_j \omega_j$, avec $\det(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) = 0$

- Le choix $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ donne un schéma stable qui a la meilleure précision, avec une convergence d'ordre 2 pour \ddot{q} . Dans ce cas, pour $\mathbf{C} = 0$ et un chargement extérieur nul, l'énergie totale du système est conservée, conformément aux équations de la mécanique.



limite de stabilité du schéma de Newmark pour le cas conservatif

$$\Delta t_c^2 = \frac{4}{\omega_{\max}^2 \left((\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta \right)}, \quad \gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$$

TABLE: Différents schémas classiques de la famille de la méthode de Newmark

	γ	β	pas de temps critique	explicite/implicite
Différences centrées	$\frac{1}{2}$	0	$2/\omega_{max}$	explicite si M et C diagonales
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$3,46/\omega_{max}$	implicite
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	implicite

$$\omega_{max} = \max_j \omega_j, \quad \det(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) = 0$$

ω_{max} peut être estimé sur le plus petit élément du maillage, pris isolément.

Pour $\mathbf{C} = 0$ l'énergie du système mécanique est conservée pour des forces extérieures nulles.

L'énergie cinétique \mathcal{T} s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

L'énergie de potentielle \mathcal{V} s'écrit :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \text{avec } \mathbf{F} = 0$$

$$[\mathcal{T} + \mathcal{V}]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n)^T \cdot \mathbf{M} \cdot (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n) + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n)^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n)$$

avec

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_n = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_{n+1} = 0$$

$$(\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n)^T \cdot \mathbf{M} \cdot (\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) = -(\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n)^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n+1})$$

Avec $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ on a :

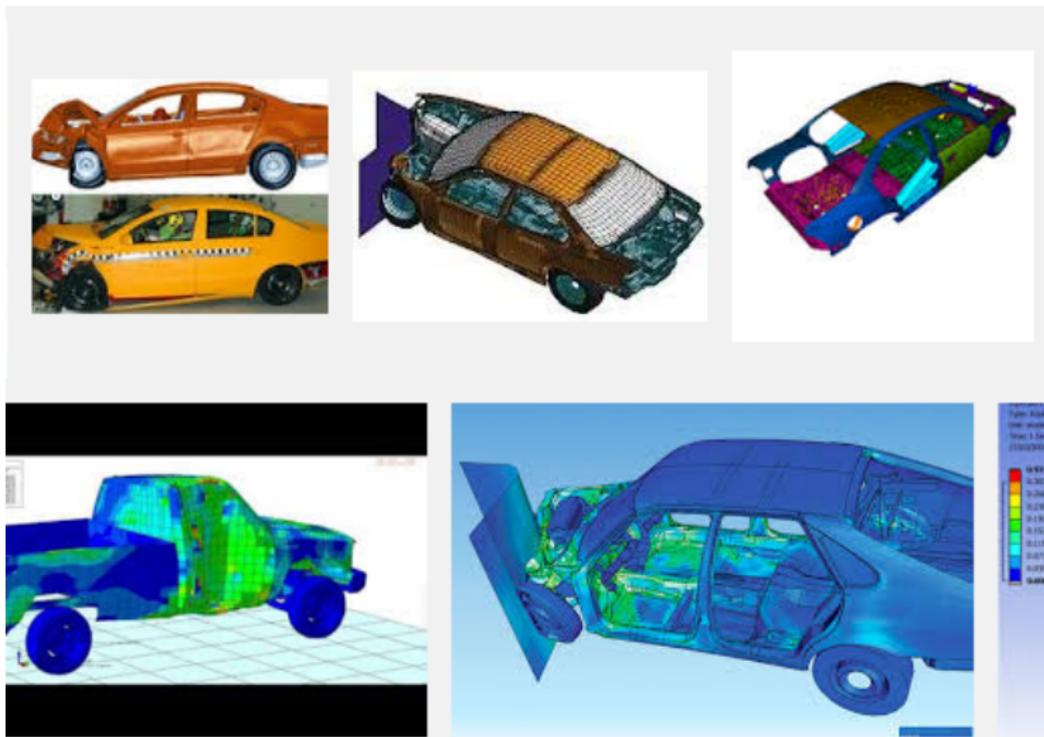
$$\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n), \quad \ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n)$$

$$\Rightarrow (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{2}{\Delta t} (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n) = -(\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n)^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n+1})$$

$$\Rightarrow 2 [\mathcal{T} + \mathcal{V}]_{t_n}^{t_{n+1}} = (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \dot{\mathbf{q}}_n))^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n+1})$$

$$\Rightarrow 2 [\mathcal{T} + \mathcal{V}]_{t_n}^{t_{n+1}} = (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n - \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \dot{\mathbf{q}}_n))^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n+1}) = 0$$

Schéma des différences centrées ($\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$)



Avec un schéma explicite, il est possible de mettre en œuvre facilement la méthode numérique pour traiter des modèles fortement non linéaires comme ceux rencontrés lors de la simulation du crash automobile, ou lors de la simulation d'opérations d'emboutissage.

Pour les équations hyperboliques il est nécessaire de vérifier une condition de stabilité dite CFL (Courant–Friedrichs–Lewy). Pour les problème d'advection, il s'agit de rendre cohérente la discrétisation en temps et en espace, pour le transport d'un champ.

On adopte une forme faible en temps.

Méthode de Galerkin discontinue à deux champs (TDG-UV) :

$$\begin{aligned} & \int_{t_{e-1}}^{t_e} \mathbf{v}^{*T} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t)) dt \\ & + \int_{t_{e-1}}^{t_e} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{K} (\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}(t)) dt \\ & + \mathbf{v}^{*T}(t_{e-1}^+) \mathbf{M} \mathbf{v}(t_{e-1}^+) + \mathbf{u}^{*T}(t_{e-1}^+) \mathbf{K} \mathbf{u}(t_{e-1}^+) \\ = & \int_{t_{e-1}}^{t_e} \mathbf{v}^{*T}(\mathbf{t}) \mathbf{dt} + \mathbf{v}^{*T}(\mathbf{t}_{e-1}^+) \mathbf{M} \mathbf{v}(\mathbf{t}_{e-1}^-) + \mathbf{u}^{*T}(\mathbf{t}_{e-1}^+) \mathbf{K} \mathbf{u}(\mathbf{t}_{e-1}^-) \end{aligned}$$

La méthode de Galerkin discontinue à un champ (TDG-U) s'obtient à partir de la méthode Galerkin discontinue à deux champs, en imposant $\mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{u}}^*$ et $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ dans le schéma d'approximation des champs, avant la résolution des équations.

L'approximation Galerkin discontinue à deux champs permet l'amortissement des vibrations à hautes fréquences (qui n'ont pas de sens physiques pour un modèle éléments finis), sans besoin d'introduire d'amortissement supplémentaire.

On reprend les approximations des déplacements et des vitesses du schéma de Newmark, mais on modifie l'évaluation des équations du mouvement.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\end{aligned}$$

Ces approximations viennent compléter l'équation différentielle en $t = t_{n+1}$:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_{n+1-\alpha} = \mathbf{F}_{n+1-\alpha}$$

où α , γ et β sont deux paramètres de la méthode.

$$t_{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) t_{n+1} + \alpha t_n$$

$$\mathbf{q}_{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) \mathbf{q}_{n+1} + \alpha \mathbf{q}_n$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) \dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha \dot{\mathbf{q}}_n$$

$$\mathbf{F}_{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) \mathbf{F}_{n+1} + \alpha \mathbf{F}_n$$

Pour $\alpha = 0$ on retrouve la méthode de Newmark. Ce schéma permet de filtrer les plus hautes fréquences.

Méthode semi analytique de recherche de réponses périodiques forcées

On considère les systèmes conservatifs $\mathbf{C} = 0$.

Pour les équations linéaires à coefficients constant, on commence par rechercher la solution générale du problème à second membre nul. En mécanique des structures, il s'agit d'un problème de vibrations libres. On cherche $\mathbf{q} = \phi e^{j \omega t}$, ($j^2 = -1$) tel que

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \phi = 0$$

avec ϕ non nul, donc $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$. Les solutions sont appelées modes propres et pulsations propres.

Puis, on cherche une solution particulière. En mécanique des structures c'est la réponse aux vibrations forcées, que l'on obtient avec la matrice des fonctions de transfert.

Le calcul des modes propres et des pulsations propres est fait par une méthode numérique de recherche de vecteurs propres.

