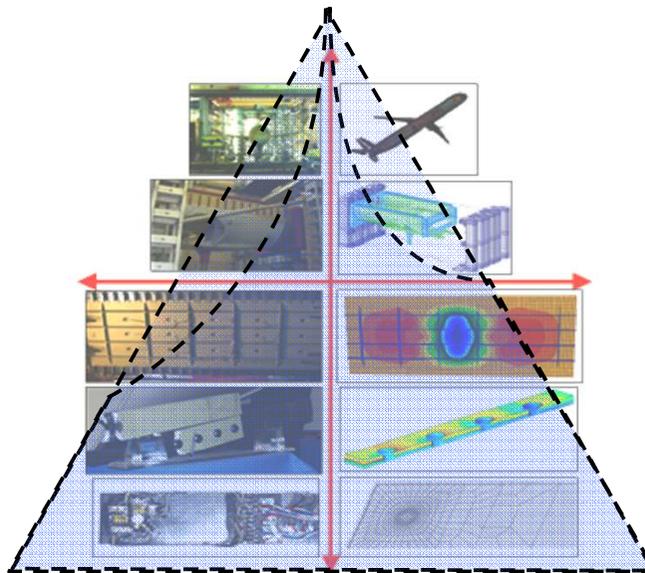


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

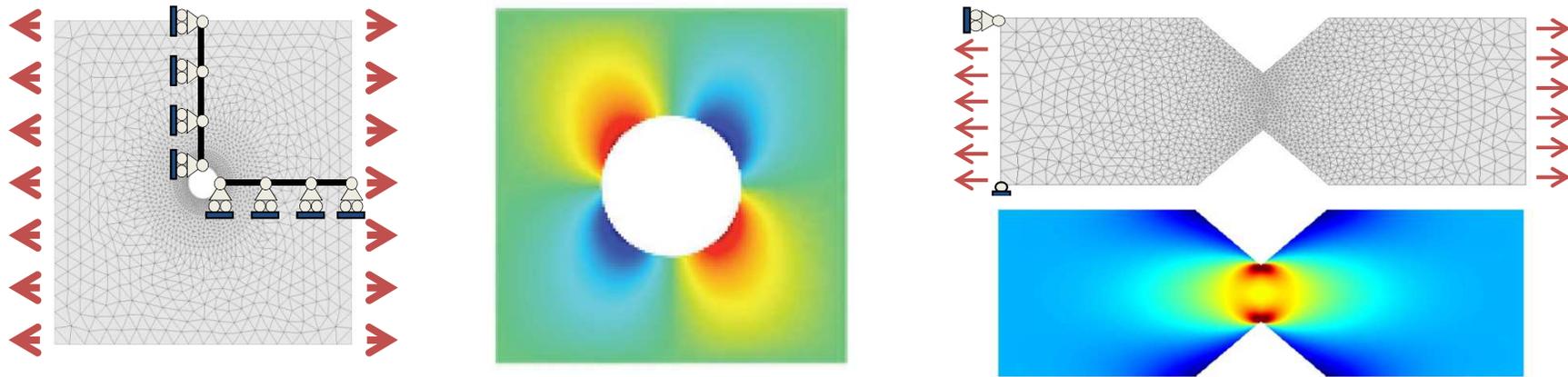
Christian Rey

christian.rey@safran.fr



Plan du cours

- 1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin
- 2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique
- 3- La méthode des éléments finis
- 4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux**
- 6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Plan du cours

1. Introduction
 1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
 2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
 3. Comportement élastoplastique (rappels)
 2. Calcul de solides élastoplastiques
 1. Aspects locaux (algorithme de retour radial)
 2. Aspects globaux (Opérateur tangent cohérent)
 3. Elasticité en transformations finies : exemple du flambage
 1. Equations de l'élasticité en transformation finies
 2. Déformations infinitésimales – grands déplacements
- 

Chapitre 2



Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux



1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 1. Règle de normalité – critère de Von Mises (rappel)
 2. Hypothèse et équations du problème
 3. Principe de la résolution numérique

1. Intégration local du comportement élastoplastique

2. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équation et principe de résolution

1. Fonction de charge - Règle de normalité – critère de Von Mises (rappel)
2. Hypothèse et équations du problème
3. Principe de la résolution numérique

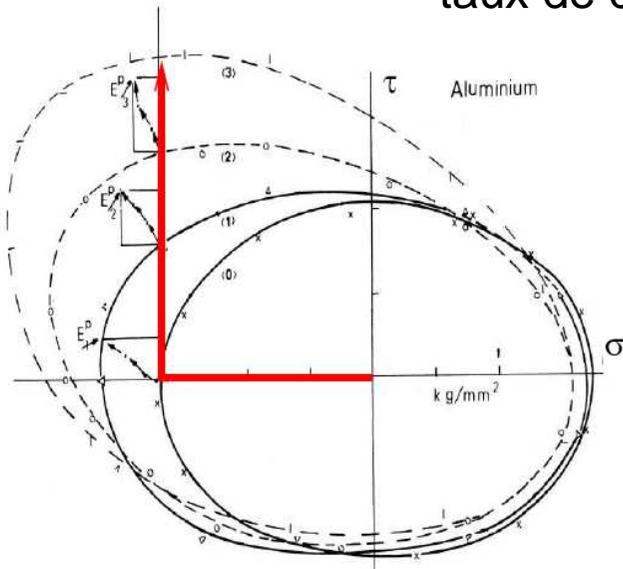
1. Intégration local du comportement élastoplastique

2. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

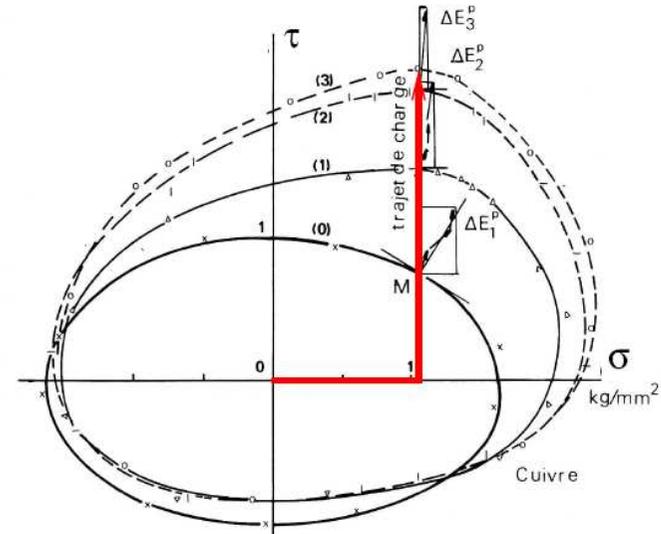
Rappel : Surface de charge et règle de Normalité

- Observation expérimentale :

taux de déformation plastique est **normal** à la surface de charge



[Bui, 1970]



- Formulation de la règle de normalité

$$\begin{cases} \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P \text{ is directed as the outgoing normal to } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$: multiplicateur plastique (a priori inconnu)

Rappel : Critère de Von Mises (1913)

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}}_{\text{Terme de pression}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Limite d'élasticité} \\ \text{Contrainte équivalente} \\ \text{Déviateur des contraintes} \end{array}$$

- **Limite indépendante de la pression**
- **Utilisé pour décrire la plasticité des métaux**
(déformation plastique due au cisaillement, dislocations du réseau cristallin)
- Pour une traction uniaxiale $\underline{\sigma} = \sigma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$ on a $\sigma^{\text{eq}} = \sigma$ (justification du coef $\sqrt{3/2}$)
- R : limite élastique observé sous un chargement de traction uniaxial

Rappel : règle de normalité pour le critère de Von Mises

- Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{eq}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- Règle de normalité

Purement déviatorique

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- Lien entre $\dot{\gamma}$ et \dot{p} :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{eq} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = \dot{\gamma}$$

Loi de comportement s'écrit finalement :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

Rappel : Synthèse

➤ Hypothèses

- HPP, linéaire, isotrope, élastique
- Critère de Von Mises
- Règle de normalité, écrouissage isotrope

Loi de comportement linéaire élastique isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

➤ Loi de comportement

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{s}}\|$$

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}})$$

Elasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0$$

Règle de normalité

Hypothèse sur $R(p)$ (convexité de $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$)

(i) $R(0) = R_0$ (ii) $R'(p) \geq 0$

(iii) $R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution

1. Fonction de charge - Règle de normalité – critère de Von Mises (rappel)
2. Hypothèse et équations du problème
3. Principe de la résolution numérique



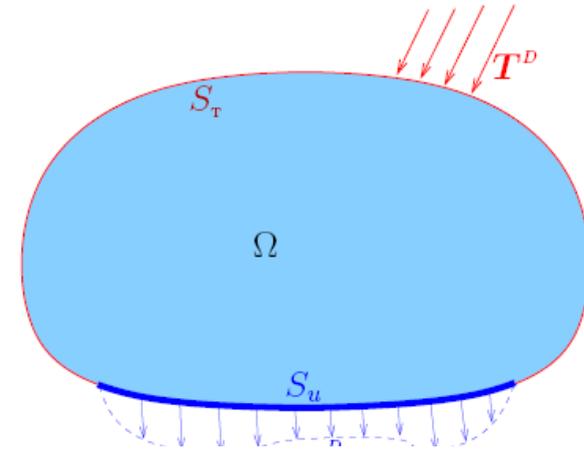
1. Intégration local du comportement élastoplastique

2. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Hypothèses et équations du problème

- HPP, quasi-static;
- Evolution (lente) du chargement
- Surface S_u et S_T indépendant du temps

Actually in elastoplasticity only the loading **sequence** matters, not loading **speed**!



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) && \text{in } \Omega \times [0, T] && \text{(compatibility)} \\ \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} &= \underline{0} && \text{in } \Omega \times [0, T] && \text{(equilibrium)} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) \underline{1} + 2\mu(\underline{e} - \underline{e}^P) && && \text{(constitutive law, elastic part)} \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P &= \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{s}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0, \quad \dot{p}[\sigma^{\text{eq}} - R(p)] = 0 && && \text{(constitutive law, plastic part)} \\ \underline{u}(\underline{x}, t) &= \underline{u}^D(\underline{x}, t) && \text{on } S_u \times [0, T] && \text{(imposed displacements)} \\ \underline{T}(\underline{x}, t) &= \underline{T}^D(\underline{x}, t) && \text{on } S_T \times [0, T] && \text{(external loading)} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^P(\underline{x}, 0) &= \underline{0} && \text{in } \Omega && \text{(initial condition)} \end{aligned}$$

Où, \underline{e} , \underline{e}^P et \underline{s} sont les parties déviatoriques de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$ et $\underline{\underline{\sigma}}$

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution

1. Fonction de charge - Règle de normalité – critère de Von Mises (rappel)
 2. Hypothèse et équations du problème
 3. Principe de la résolution numérique
- 

1. Intégration local du comportement élastoplastique

2. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Principe de la résolution numérique

Rappel du cas de l'élasticité non linéaire

Trouver la position d'équilibre avec un algorithme basé sur :

- Forme faible (PPV) des équations d'équilibre
- Construction d'une séquence $\underline{u}^{(k)}$ qui converge vers la solution \underline{u} par un algorithme de Newton-Raphson
- Loi de comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) = F^{elas}(\underline{u})$

La solution dépend
seulement de la valeur du
chargement courant

$$R(\underline{u}; \underline{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f} : \underline{v} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \underline{T}^d : \underline{v} d\Gamma$$

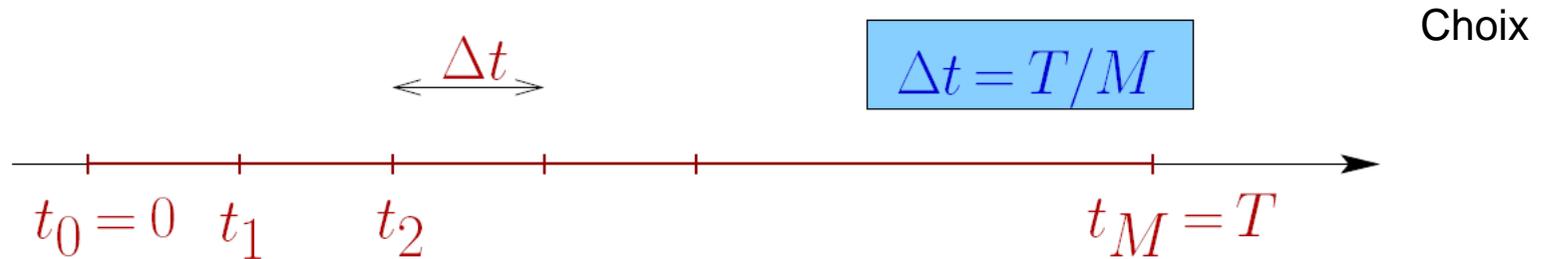
Cas de l'élastoplasticité : Approche similaire mais avec quelques différences notables

- Evolution quasi-statique : la solution dépend de (\underline{x}, t) :
 - On cherche une séquence de solutions à l'équilibre
- La loi de comportement dépend de l'histoire du chargement

la solution dépend de
l'histoire du chargement

$$\underline{\underline{\sigma}} \neq F^{plast}(\underline{u}(\underline{x}, t))$$

Discrétisation temporelle : recherche de solutions pas à pas



➤ Objectif de l'algorithme :

(notation : $f_n(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}, t_n)$)

Calculer l'état mécanique $\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^P, \underline{\sigma}_n \dots\}$ chaque instant $t = t_n$



➤ Approche incrémentale : calculer les états mécanique $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M$ pas à pas

Formulation d'un algorithme qui :

Connaissant l'état mécanique \mathcal{S}_n et le chargement $(\underline{f}_{n+1}, \underline{u}_{n+1}^D, \underline{T}_{n+1}^D)$

donne l'état mécanique \mathcal{S}_{n+1}

Problème à l'instant t_{n+1} : approche en déplacement

- Pour chaque incrément $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$:

Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant $t = t_{n+1}$



$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(0)$$

- Discrétisation en espace (FEM) : approximation de $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

inconnue

fonction test

Problème à l'instant t_{n+1}

- Forme faible (PPV) des équations d'équilibre + CL à l'instant $t = t_{n+1}$
- Discrétisation en espace (FEM) approximation de $\underline{u}_{n+1}, \underline{w}$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in C(0)$$

➤ Conséquence

- Le déplacement \underline{u}_{n+1} est le champ inconnu principal
- Il faut donc pouvoir exprimer $\underline{\sigma}_{n+1}$ comme une variable dépendant de \underline{u}_{n+1} et de l'état mécanique $\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{u}_n, \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_n^P, \underline{\sigma}_n \dots\}$

De la forme $(\underline{u}_{n+1}, \mathcal{S}_n) \longrightarrow \underline{\sigma}_{n+1} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; \mathcal{S}_n)$ (\mathcal{F} algorithme à préciser)

Satisfaction de la loi de comportement à l'instant t_{n+1}

- Supposons donc l'algorithme \mathcal{F} connu, la définition du résidu (déviation à l'équilibre)

$$\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; \mathcal{S}_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

- Le problème à l'instant t_{n+1} s'écrit :

$$\text{Trouver } \underline{u}_{n+1} \in C(\underline{u}_{n+1}^D) = U_{\text{ad}}^{n+1} \text{ tel que } R(\underline{u}_{n+1}; \underline{v}, \mathcal{S}_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(0)$$

Problème à l'instant t_{n+1}

- Supposons donc l'algorithme \mathcal{F} connu, le problème à l'instant t_{n+1} s'écrit :

$$\text{Trouver } \underline{u}_{n+1} \in C(\underline{u}_{n+1}^D) = U_{\text{ad}}^{n+1} \text{ tel que } R(\underline{u}_{n+1}; \underline{v}, S_n) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$$

avec :

$$\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, S_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; S_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

problème non linéaire

- Mise en oeuvre de la méthode de Newton Raphson

Linéarisation autour de l'état courant

$$\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}^{(k+1)}; \underline{w}) \approx \mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}^{(k)}; \underline{w}) + \langle \mathcal{R}'(\underline{u}_{n+1}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}_{n+1}^{(k)} \rangle = 0$$

Ce que l'on va faire aujourd'hui!

Ce que l'on fera la prochaine fois !

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
 1. Formulation local du problème
 2. Intégration en temps
 3. Prédiction élastique et correction
 4. Algorithme de retour radial
 5. Ecart à la radialité – erreur d'intégration temporelle
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale



Formulation locale du problème

➤ Problème auxiliaire local (en chaque point matériel) :

- L'état mécanique \mathcal{S}_n à l'instant t_n est **connu**
- $\{\underline{\varepsilon}_{-n}, \underline{\varepsilon}_{-n}^P, \underline{\sigma}_{-n}\}$ **homogène** en chaque point matériel
- On suppose que $\underline{u}_{n+1}^{(k)}$ est donnée et par conséquent de $\underline{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ et de l'incrément de déformation $\Delta_{\underline{\varepsilon}_{-n}}^{(k)}$ entre les instants t_n et t_{n+1}

on omettra par la suite (k)

L'évaluation du résidu $\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n)$ à l'instant $t=t_{n+1}$ requiert :

$$\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{u}_{n+1}; \mathcal{S}_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f}_{n+1} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}_{n+1}^D \cdot \underline{w} dS$$

express stress $\underline{\sigma}_{-n+1}$ as $\underline{\sigma}_{-n+1} = \mathcal{F}(\Delta_{\underline{\varepsilon}_{-n}}; \mathcal{S}_n)$

$$\underline{\varepsilon}_{-n}, \underline{\varepsilon}_{-n}^P, \underline{\sigma}_{-n}$$

→

$$\underline{\varepsilon}_{-n+1} = \underline{\varepsilon}_{-n} + \Delta_{\underline{\varepsilon}_{-n}}$$

$$\underline{\sigma}_{-n+1} = ?, \underline{\varepsilon}_{-n+1}^P = ?$$

De sorte que la loi de comportement soit satisfaite, à savoir :

Trouver $\underline{\sigma}_{n+1}$ (et $\underline{\varepsilon}_{n+1}^P$) prédits par la loi de comportement

$$\underline{\sigma} = \kappa \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu(\underline{e} - \underline{\varepsilon}^P) \quad \text{Elasticité}$$

$$f(\underline{\sigma}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0 \quad \text{Critère de Von Mises}$$

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{s} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{N}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0 \quad \text{Règle de normalité}$$

Formulation locale du problème

L'évaluation du résidu $\mathcal{R}(\underline{u}_{n+1}; \underline{w}, \mathcal{S}_n)$ à l'instant $t=t_{n+1}$ requiert :

express stress $\underline{\sigma}_{n+1}$ **as** $\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}; \mathcal{S}_n)$

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_{-n}, \underline{\varepsilon}_{-n}^P, \underline{\sigma}_{-n}} \longrightarrow \boxed{\underline{\varepsilon}_{-n+1} = \underline{\varepsilon}_{-n} + \Delta \underline{\varepsilon}_{-n}}, \quad \boxed{\underline{\sigma}_{-n+1} = ?, \underline{\varepsilon}_{-n+1}^P = ?}$$

De sorte que la loi de comportement soit satisfaite, à savoir :

Trouver $\underline{\sigma}_{n+1}$ (et $\underline{\varepsilon}_{n+1}^P$) prédits par la loi de comportement

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) & \text{Elasticité} \\ f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0 & \text{Critère de Von Mises} \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0 & \text{Règle de normalité} \end{array} \right.$$

➤ Remarques :

➤ La déformation plastique est une variable dépendante

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P = \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} - \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$$

➤ Le schéma d'intégration du comportement privilégie une approche en déformation plutôt qu'en déplacement

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
 1. Formulation local du problème
 2. Intégration en temps 
 3. Prédiction élastique et correction
 4. Algorithme de retour radial
 5. Ecart à la radialité – erreur d'intégration temporelle
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Intégration temporelle : approche implicite

Exprimer $\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\varepsilon}_n; \mathcal{S}_n)$ de sorte que la loi de comportement soit satisfaite à l'instant t_{n+1}

- Règle de normalité pour la déformation plastique (critère de Von Mises) s'écrit :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{eq}} \underline{s}$$

- Intégration numérique : approximation par différence finie de la dérivée temporelle

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [\underline{\varepsilon}_{n+1}^P - \underline{\varepsilon}_n^P] \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1})$$

Où pour t, on peut utiliser :

- $t=t_n$: approche **explicite** (forward différences)
- $t=t_{n+1}$: approche **implicite** (backward différences)

- Propriétés de l'intégration numérique (stabilité, précision) dépendent de ce choix (MSM21)

En règle général :

Approche explicite : **conditionnellement** stable (Δt suffisamment petit)

Approche implicite : **inconditionnellement** stable (pour tout Δt)

Notre Choix : approche implicite

Version “discrète” de la loi de comportement

Exprimer $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n; \mathcal{S}_n)$ de sorte que la loi de comportement soit satisfaite à l’instant t_{n+1}

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P) \\ f(\underline{\underline{\sigma}}, p) &= \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0 \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P &= \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0 \end{aligned}$$

Version continue

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P_{n+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} [\underline{\underline{\varepsilon}}^P_{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P_n] = \frac{1}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P_n \\ \dot{p}_{n+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} [p_{n+1} - p_n] = \frac{1}{\Delta t} \Delta p_n \end{aligned}$$

On écrit la loi de comportement en $t=t_{n+1}$

(a) $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{tr}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\Delta\underline{\underline{e}}_n - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^P_n)$

Elasticité

(b) $\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) \leq 0$

Critère de Von Mises

(c) $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P_n = \Delta p_n \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1}$

Règle de normalité

$\Delta p_n \geq 0, \quad \Delta p_n (\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n)) = 0$

Version discrète

$\Delta \underline{\underline{e}}_n$: Partie déviatorique de $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$
 $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$: Incrément de déformation plastique inconnu
 $\underline{\underline{N}}_{n+1}$: Normal unitaire à la surface de charge **finale** (inconnue)

Version “discrète” de la loi de comportement

- Le problème à résoudre s’écrit :

Étant donnée $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n$, trouver Δp_n , $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P$ solution de :

$$(a) \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\Delta \underline{\underline{e}}_n - \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P)$$

Elasticité

$$(b) \quad \sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$(c) \quad \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \Delta p_n \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}}_{n+1} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1}$$

Règle de normalité

$$\Delta p_n \geq 0, \quad \Delta p_n (\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n)) = 0$$

Version discrète

- La solution varie selon que :

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) < 0 \quad : \text{évolution purement élastique} \Rightarrow \Delta p_n = 0$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad : \text{évolution élastoplastique} \Rightarrow \Delta p_n \geq 0$$

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
 1. Formulation local du problème
 2. Intégration en temps
 3. Prédiction élastique et correction 
 4. Algorithme de retour radial
 5. Ecart à la radialité – erreur d'intégration temporelle
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Prédiction élastique et correction

Exprimer $\underline{\sigma}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta \underline{\varepsilon}_n; \mathcal{S}_n)$ de sorte que la loi de comportement soit satisfaite à l'instant t_{n+1}

$$(a) \quad \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\varepsilon}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\Delta \underline{e}_n - \Delta \underline{\varepsilon}_n^p)$$

Elasticité

$$(b) \quad \sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$(c) \quad \Delta \underline{\varepsilon}_n^p = \Delta p_n \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{\text{eq}}} \underline{s}_{n+1} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1}$$

Règle de normalité

$$\Delta p_n \geq 0, \quad \Delta p_n (\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n)) = 0$$

Version discrète

➤ La solution varie selon que :

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) < 0 \quad : \text{évolution purement élastique} \Rightarrow \Delta p_n = 0$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{eq}} - R(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad : \text{évolution élastoplastique} \Rightarrow \Delta p_n \geq 0$$

➤ Schema : On commence par tester une évolution purement élastique

Définition d'un prédicteur élastique ($\Delta \underline{\varepsilon}_n^p = \underline{\underline{0}}$)

$$\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\varepsilon}_n) \underline{\underline{1}} + 2\mu \Delta \underline{e}_n$$

$$\text{i.e.} \quad \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu \Delta \underline{e}_n$$

Deux possibilités

- La prédiction élastique est «plastiquement» admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$$

On montre (convexité de f) alors que

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \geq f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) \quad \text{et donc}$$

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) < 0$$

On montre que si $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$ alors $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \geq f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n)$

Preuve: (Convexité de f , que l'on suppose également différentiable).

$$[f \text{ conv. diff.} \Leftrightarrow \forall (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1) \geq \nabla f(\underline{x}_1) \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)]$$

ici cela s'écrit:

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) - f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) \geq \underbrace{(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - \underline{\sigma}_{n+1}) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_{n+1}) + (0 - \Delta p_n) \frac{\partial f}{\partial p}(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) \right)}_A$$

$$\text{Avec } \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{\sigma}_n + C : \underline{\Delta \varepsilon}_n \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + C : (\underline{\Delta \varepsilon}_n - \underline{\Delta \varepsilon}_n^p)$$

$$\text{Ainsi: } \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - \underline{\sigma}_{n+1} = C : \underline{\Delta \varepsilon}_n^p = K \underbrace{\text{tr}(\underline{\Delta \varepsilon}_n^p)}_{=0} \underline{1} + 2\nu \underline{\Delta \varepsilon}_n^p = 2\nu \underline{\Delta \varepsilon}_n^p$$

$$= 2\nu \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1} \quad [= C \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1}]$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial p}(\underline{\sigma}_n, p_n + \Delta p_n) = -R'(\underline{\sigma}_n, p_n + \Delta p_n) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}_{n+1}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1}$$

$$\text{Ainsi: } A = \frac{3}{2} \times 2\nu \Delta p_n \underbrace{\underline{N}_{n+1} : \underline{N}_{n+1}}_{=1} + \Delta p_n R'(\underline{\sigma}_n, p_n + \Delta p_n) \geq 0 \quad \underline{\text{CQFD}}$$

$$\underline{\text{Rq:}} \text{ on peut écrire } C \Rightarrow A = \frac{3}{2} \Delta p_n \underbrace{\underline{N}_{n+1} : C : \underline{N}_{n+1}}_{\geq 0} + \Delta p_n \underbrace{R'(\underline{\sigma}_n, p_n + \Delta p_n)}_{\geq 0} \geq 0$$

(car $C > 0$)

Deux possibilités

- La prédiction élastique est «plastiquement» admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$$

On montre (convexité de f) alors que

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \geq f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) \quad \text{et donc} \quad f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) < 0$$

Dès lors, l'évolution est bien purement élastique, la prédiction élastique est donc correct

La solution s'écrit alors :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \quad p_{n+1} = p_n$$

Deux possibilités

- La prédiction élastique est «plastiquement» admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$$

La solution est :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \quad p_{n+1} = p_n$$

- La prédiction élastique n'est pas «plastiquement» admissible,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0$$

- $\Delta \underline{\varepsilon}_n \neq \Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{E}}$, la déformation plastique $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \neq \underline{0}$, $\Delta p_n > 0$

Condition de
consistance

- La condition de complémentarité (forme discrète) s'écrit

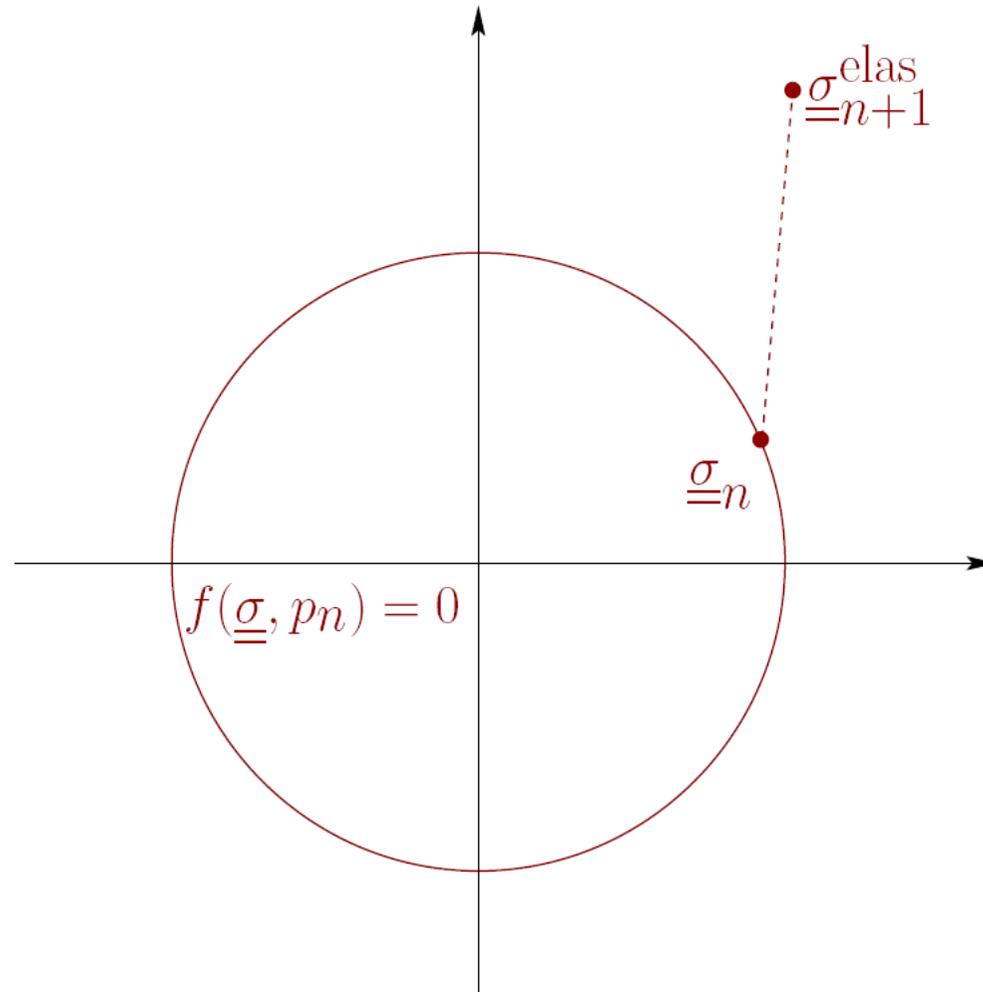
$$\Delta p_n f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) = 0 \implies f(\underline{\sigma}_{n+1}, p_n + \Delta p_n) = 0$$

- La forme discrète de la loi de comportement se réduit alors à :

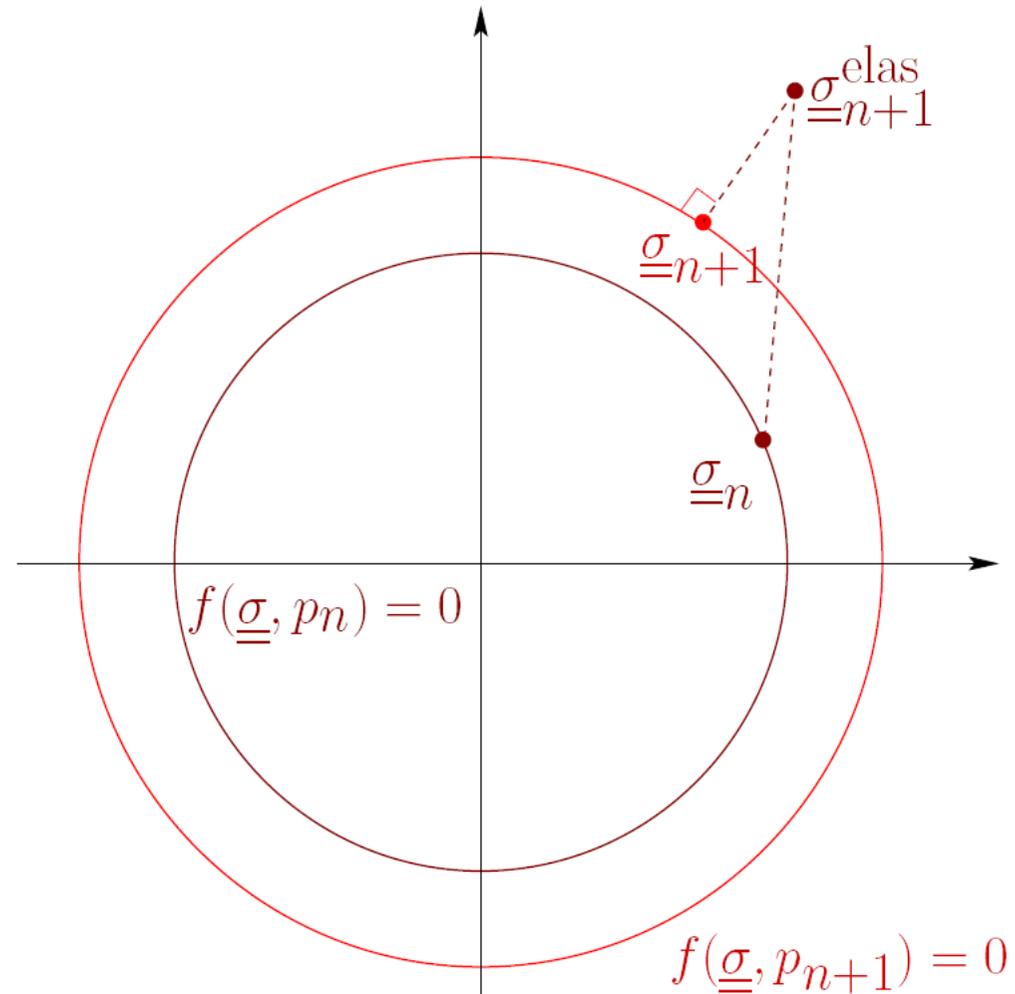
$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad \Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{n+1}, \quad \Delta p_n > 0$$

- La correction $\underline{\sigma}_{n+1} - \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$ est orthogonal à **la surface de charge finale**
- La phase de correction est de nature **implicite** (la surface de charge finale est inconnue)

Interprétation géométrique dans l'espace des contraintes



Interprétation géométrique dans l'espace des contraintes



Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
 1. Formulation local du problème
 2. Intégration en temps
 3. Prédiction élastique et correction 
 4. Algorithme de retour radial
 5. Ecart à la radialité – erreur d'intégration temporelle
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale

Algorithme de retour radial

- **Hypothèse : évolution plastique** ($\Delta p_n \neq 0$)

Correction : opération de type implicite (surface de charge finale inconnue)

- Partie déviatorique de la prédiction élastique

$$(1) \quad \underline{s}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} \quad \text{avec} \quad \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu \Delta \underline{e}_n$$

- De plus,

$$(2) \quad \Delta \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_n \underline{N}_{n+1} \quad (\text{règle de normalité}) \quad \underline{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{s}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$(3) \quad \underline{s}_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{n+1}^{\text{eq}} \underline{N}_{n+1} \quad (\text{vecteur normal à la surface de Von Mises})$$

$$(2) \text{ et } (3) \text{ dans } (1) \implies \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{n+1}^{\text{eq}} + 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_n \right) \underline{N}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$$

- La normale «finale» \underline{N}_{n+1} à la surface de charge est parallèle à la prédiction $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$,

$$\underline{N}_{n+1} = \frac{1}{\|\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}\|} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{N}_{n+1}^{\text{elas}}$$

- Elle est ainsi a priori connue en fonction de \underline{s}_n et $\Delta \underline{\varepsilon}_n$

Algorithme de retour radial

- La normale «finale» \underline{N}_{n+1} à la surface de charge est parallèle à la prédiction $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}$,

$$\underline{N}_{n+1} = \frac{1}{\|\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}}\|} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{N}_{n+1}^{\text{elas}}$$

- Elle est ainsi a priori connue en fonction de \underline{s}_n et $\Delta \underline{\varepsilon}_n$

- **La partie déviatorique des contraintes s'écrit :** $\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} - 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta p_n \underline{N}_{n+1}^{\text{elas}}$

- **La contrainte équivalente de Von Mises :** $\sigma_{n+1}^{\text{eq}} = \sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n$

- **La forme discrète de la condition de consistance** (évolution plastique par hypothèse)

$$\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$$

Il s'agit d'une équation non linéaire (scalaire) d'inconnue Δp_n , que l'on peut résoudre par la mise en oeuvre d'un algorithme de type Newton-Raphson

$$\Delta p_n^{(k+1)} = \Delta p_n^{(k)} + \frac{\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu \Delta p_n^{(k)} - R(p_n + \Delta p_n^{(k)})}{3\mu + R'(p_n + \Delta p_n^{(k)})}$$

Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$ (elastic predictor), then $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$ and $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas,eq}}$;

Algorithme de retour radial : synthèse

(a) Compute $\underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} = \underline{s}_n + 2\mu\Delta\underline{e}_n$ (elastic predictor), then $\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}$ and $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}$;

(b) Compute $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n)$ and **test** :

► **If** $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) \leq 0$ (**elastic evolution**), solution given by :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, \quad \underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n \quad \text{(END)}$$

► **If** $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, p_n) > 0$ (**elastoplastic evolution**) :

(i) Solve $\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}} - 3\mu\Delta p_n - R(p_n + \Delta p_n) = 0$ for Δp_n ;

(ii) Compute the increment of plastic strains

$$\Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} = \frac{3\Delta p_n}{2\sigma_{n+1}^{\text{elas,eq}}} \underline{s}_{n+1}^{\text{elas}} ;$$

(iii) Update variables :

$$\underline{\varepsilon}_{n+1}^{\text{P}} = \underline{\varepsilon}_n^{\text{P}} + \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}}, \quad p_{n+1} = p_n + \Delta p_n \quad \text{(END)}$$

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_n + \kappa \text{tr}(\Delta\underline{\varepsilon}_n) \underline{1} + 2\mu(\Delta\underline{e}_n - \Delta\underline{\varepsilon}_n^{\text{P}})$$

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
2. Intégration local du comportement élastoplastique
 1. Formulation local du problème
 2. Intégration en temps
 3. Prédiction élastique et correction
 4. Algorithme de retour radial
 5. Ecart à la radialité – erreur d'intégration temporelle
3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale



Ecart à la radialité – Erreur d'intégration temporelle

- La déformation plastique cumulée

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) du$$

Règle de normalité (version continue en temps)

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^P - \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^P(u) du = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) \underline{\underline{N}}(u) du$$

- Si la normale $\underline{\underline{N}}$ est constante sur $[t_n, t_{n+1}]$: intégration exacte

$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P = \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1} \quad (\text{Règle de normalité discrète})$$

Il y a équivalence en la version **continue** et **discrète** de la loi de comportement
Algorithme de retour radial est exacte sur l'incrément de contrainte est radial

- Si la normale $\underline{\underline{N}}$ varie sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$\text{Error} = \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^P - \Delta p_n \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p}(u) [\underline{\underline{N}}(u) - \underline{\underline{N}}_{n+1}] du$$

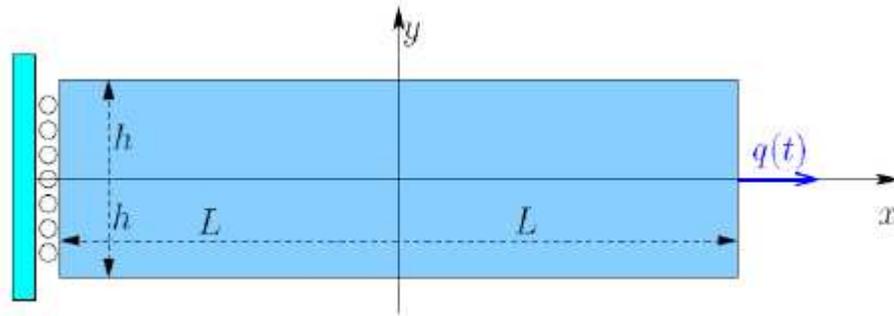
L'erreur augmente en fonction de $\underline{\underline{N}}(t) - \underline{\underline{N}}_{n+1}$ (déviation à la radialité)

Chapitre 2

Calcul élastoplastique par la MEF – Aspect Locaux

1. Calcul d'une structure élastoplastique: équations et principe de résolution
 2. Intégration local du comportement élastoplastique
 3. Un exemple simple : traction-compression uniaxiale (TD / BE)
- 

Exemple (TD/BE) : Traction-compression uniaxiale

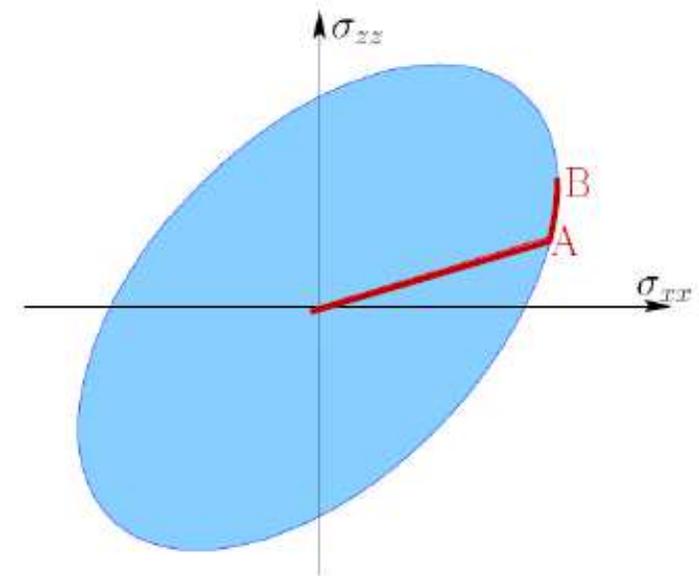


$$\begin{aligned} u_x(L, y) &= q(t) & T_y(L, y) &= 0 \\ u_x(-L, y) &= T_y(-L, y) &= 0 \\ T_x(x, \pm h) &= T_y(x, \pm h) &= 0 \end{aligned}$$

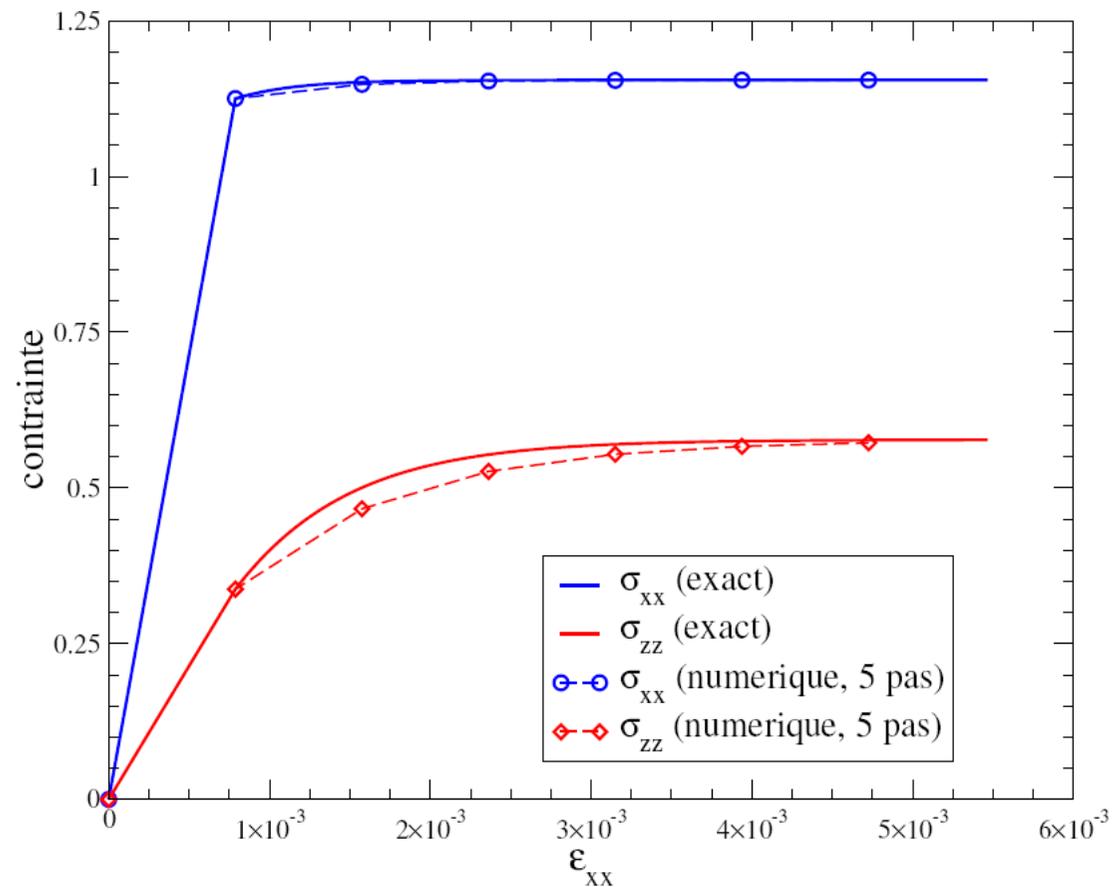
➤ Solution analytique

- Déformation plane
- Elastique, parfaitement plastique
- Déformations homogène ε_{xx} et ε_{yy} (autres=0)
- Contraintes homogène σ_{xx} et σ_{zz} (autres=0)

➤ Chargement non radial (chemin AB)

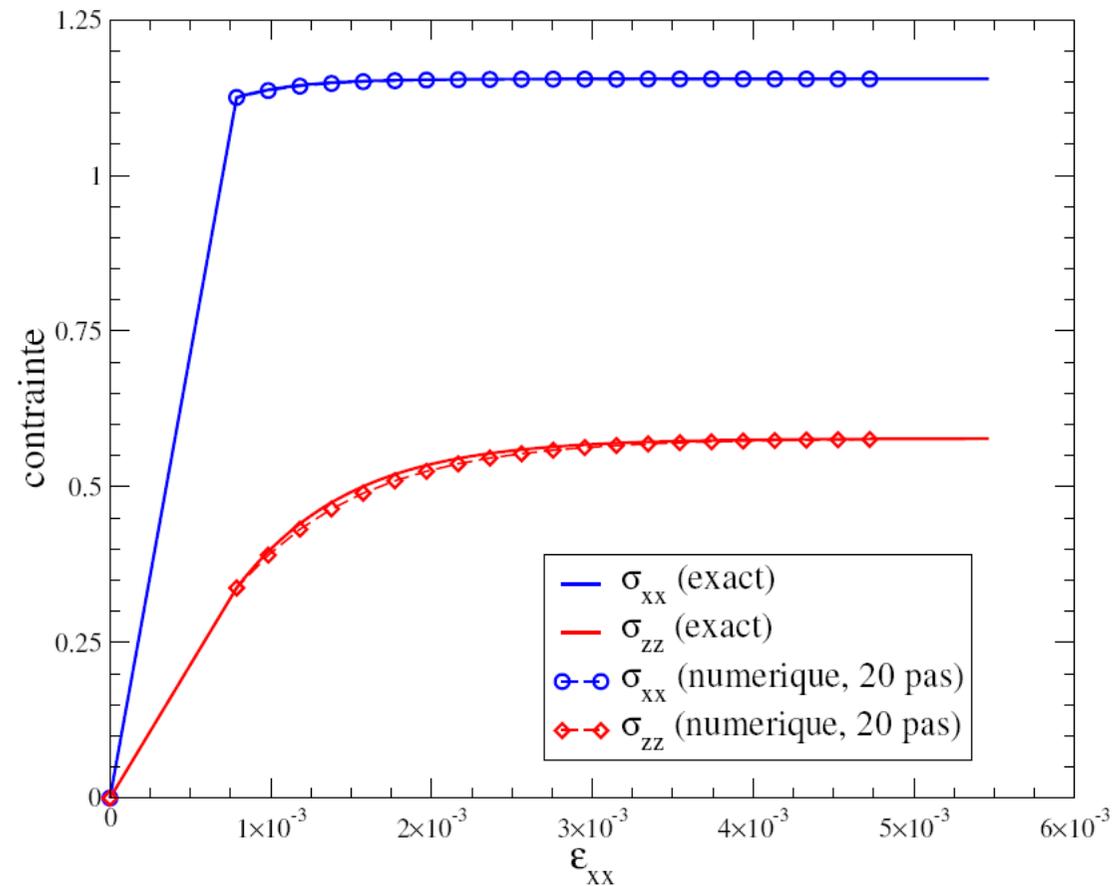


Exemple (TD/BE) : Traction-compression uniaxiale



Number of time steps employed for the plastic evolution: **5**

Exemple (TD/BE) : Traction-compression uniaxiale



Number of time steps employed for the plastic evolution: **20**

that's all folks