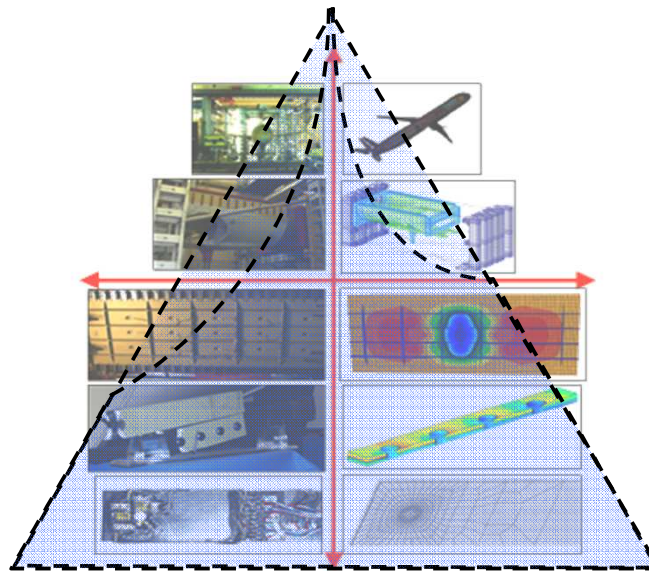


Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

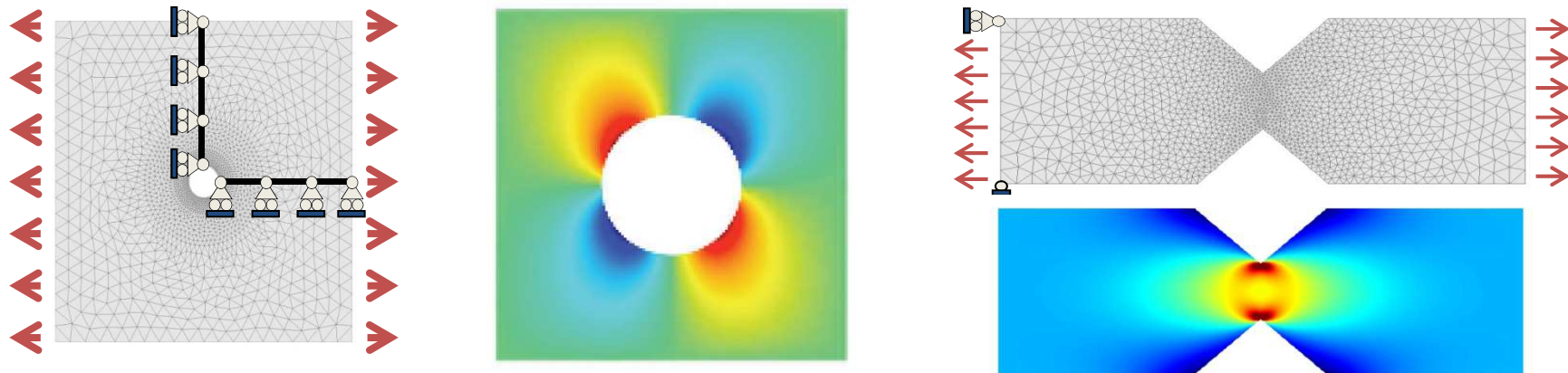
Christian Rey

christian.rey@safran.fr



Plan du cours

- 1- Rappel sur l'élasticité linéaire – Méthode de Galerkin
- 2- Le concept d'éléments finis isoparamétrique
- 3- La méthode des éléments finis
- 4- Introduction aux calculs de structures non-linéaires**
- 5- Calcul de solides élastoplastique – aspects locaux
- 6- Calcul de solides élastoplastique – aspects globaux



Utilisation et développement au sein d'un code simple sous Matlab (2D)

Analyse du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis

Plan du cours



1. Introduction
 1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
 2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
 3. Comportement élastoplastique (rappels)

2. Calcul de solides élastoplastiques
 1. Aspects locaux (algorithme de retour radial)
 2. Aspects globaux (Opérateur tangent cohérent)

3. Elasticité en transformations finies : exemple du flambage
 1. Equations de l'élasticité en transformation finies
 2. Déformations infinitésimales – grands déplacements



1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires

Susceptibles d'apparaître en association avec solides élastiques linéaires HPP :

- *Contact unilatéral (avec ou sans frottement)*
- *Propagation de fissures*
- *Usure...*

Modèles de comportement non-linéaires de matériaux :

- *Endommagement ;*
- *Plasticité...*

Comportements géométriquement non-linéaires de structures :

- *Transformations finies, flambage ...*

2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires

Susceptibles d'apparaître en association avec solides élastiques linéaires HPP :

- *Contact unilatéral (avec ou sans frottement)*
- *Propagation de fissures*
- *Usure...*

Modèles de comportement non-linéaires de matériaux :

- *Endommagement ;*
- *Plasticité...*

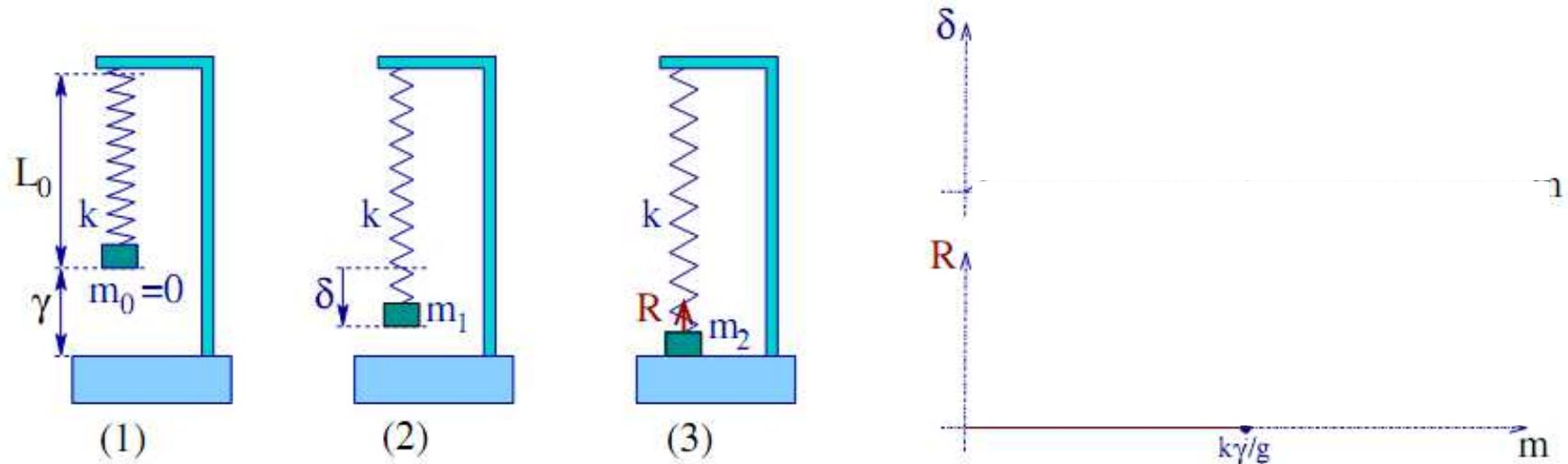
Comportements géométriquement non-linéaires de structures :

- *Transformations finies, flambage ...*

2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Contact unilatéral

Exemple : système masse-ressort suspendu au-



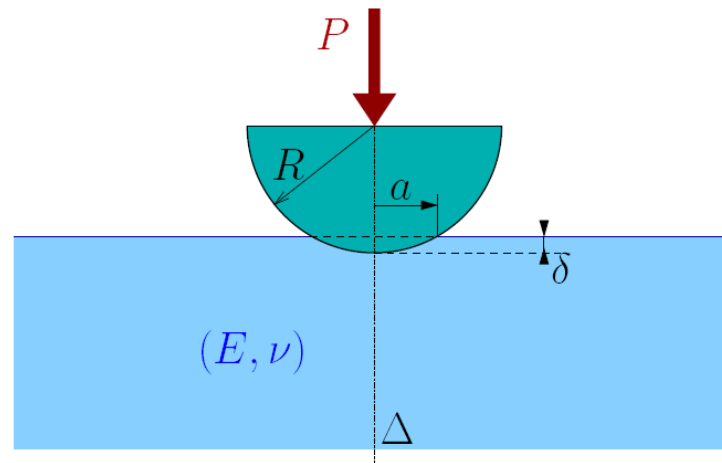
(1) $m = 0$ (2) $m < k\gamma/g$ (3) $m > k\gamma/g$

Il y a contact pour $m \geq k\gamma/g$, avec développement d'une réaction $R = mg - k\gamma$

La réponse d'un système de solides (l'un au moins étant déformable) en contact unilatéral est une fonction **non linéaire** de la sollicitation, même si **chaque solide est élastique linéaire**

Exemple: Contact de Hertz

Exemple de solution analytique :
poinçonnement d'un massif infini plan (solution de Hertz, 1882)



Rayon de zone de contact a et profondeur d'indentation δ fonctions **non linéaires** de la force de poinçonnement P :

$$a = \left(\frac{3R(1 - \nu^2)}{4E} \right)^{1/3} P^{1/3} \quad \delta = \left(\frac{3(1 - \nu^2)}{4E\sqrt{R}} \right)^{2/3} P^{2/3}$$

La réponse d'un système de deux solides déformable en contact unilatéral est une fonction **non linéaire** de la sollicitation, même si **chaque solide est élastique linéaire**

Contact unilateral (transformations infinitesimales)

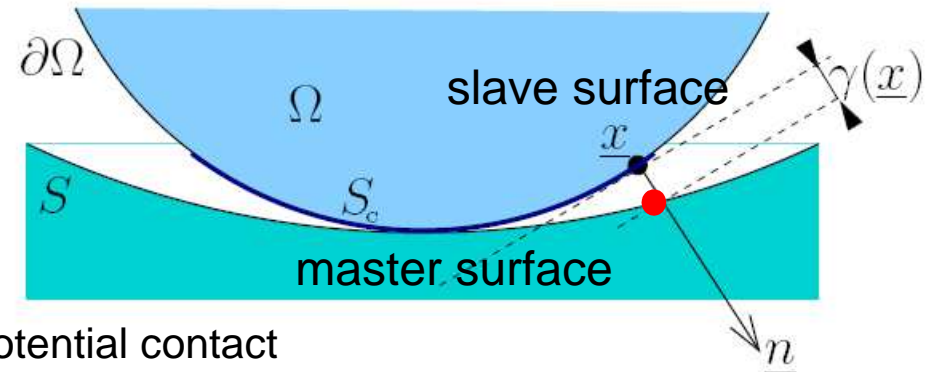
Contact unilatéral **sans frottement**

$\underline{T} - T_n \underline{n} = \underline{0}$	Pas d'effort tangentiel
$T_n \leq 0$	compression! (on S_c)
$u_n - \gamma \leq 0$	pas d'interpénétration
$(u_n - \gamma) T_n = 0$	complémentarité

Select a **master** surface and a **slave** surface.

The nodes of the slave surface cannot penetrate the master surface

γ : gap along normal direction



S_c area of potential contact

Contact unilatéral

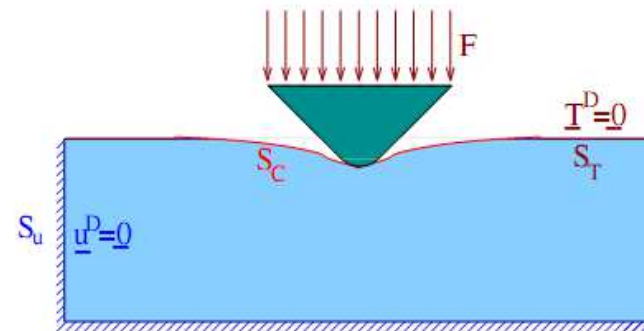
La réponse d'un système de solides (l'un au moins étant déformable) en contact unilatéral est une fonction **non linéaire** de la sollicitation, même si **chaque solide est élastique linéaire**

Frottement : exemple de la loi de coulomb

En tout point $\underline{x} \in S_C^{\text{eff}}$:

Si $T_t < fT_n$, il y a adhérence en \underline{x}

Si $T_t = fT_n$, il y a glissement en \underline{x}



$$T_t = \|\underline{T} - T_n \underline{n}\|$$

f : coefficient de frottement

1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires

Susceptibles d'apparaître en association avec solides élastiques linéaires HPP :

- *Contact unilatéral (avec ou sans frottement)*
- *Propagation de fissures*
- *Usure...*

Modèles de comportement non-linéaires de matériaux :

- *Endommagement ;*
- *Plasticité...*

Comportements géométriquement non-linéaires de structures :

- *Transformations finies, flambage ...*

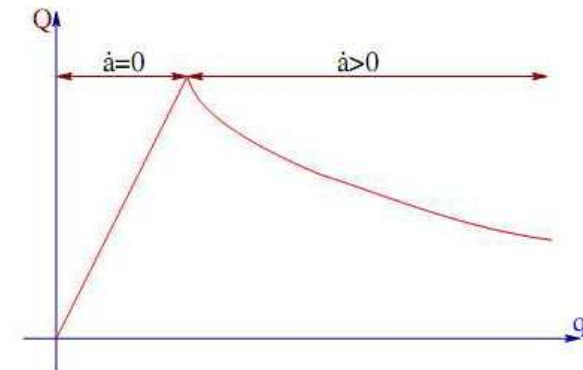
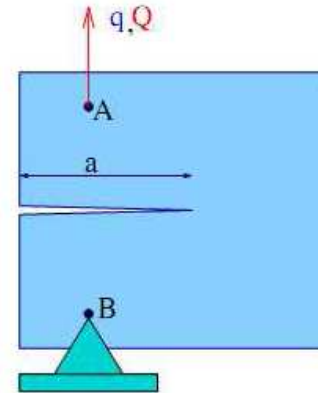
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Exemple : propagation de fissures

Si le chargement est évolutif

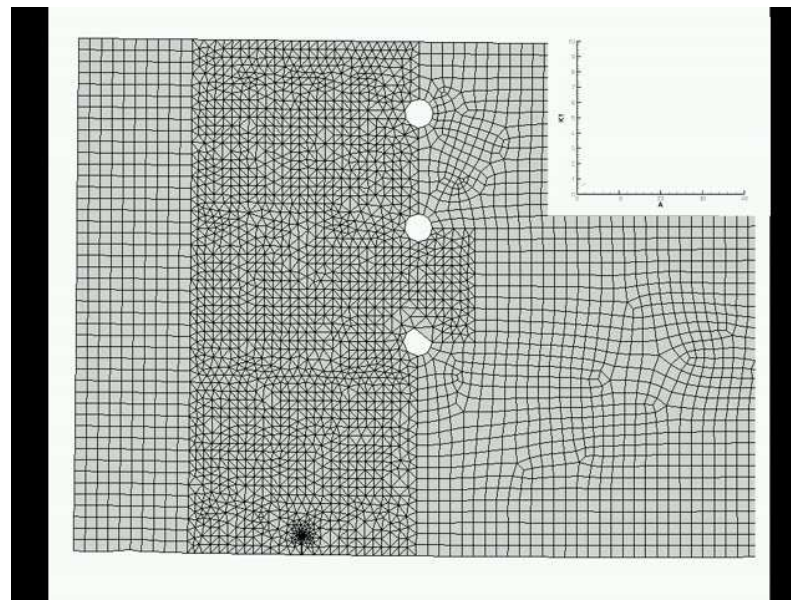
$$\underline{u} = \underline{u}^D(\underline{x}, t) \quad (\underline{x} \in S_\xi, t \in [0, T])$$

$$\underline{T} = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \quad (\underline{x} \in S_T, t \in [0, T])$$



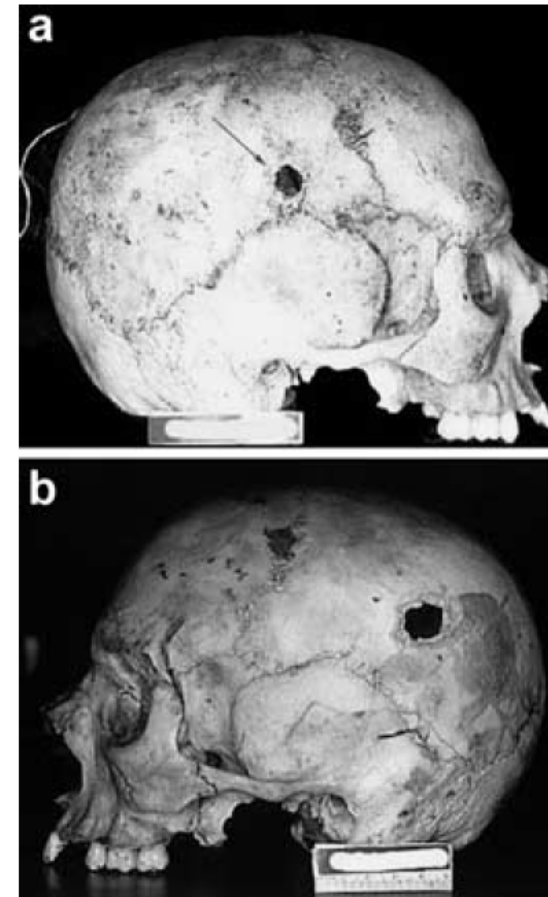
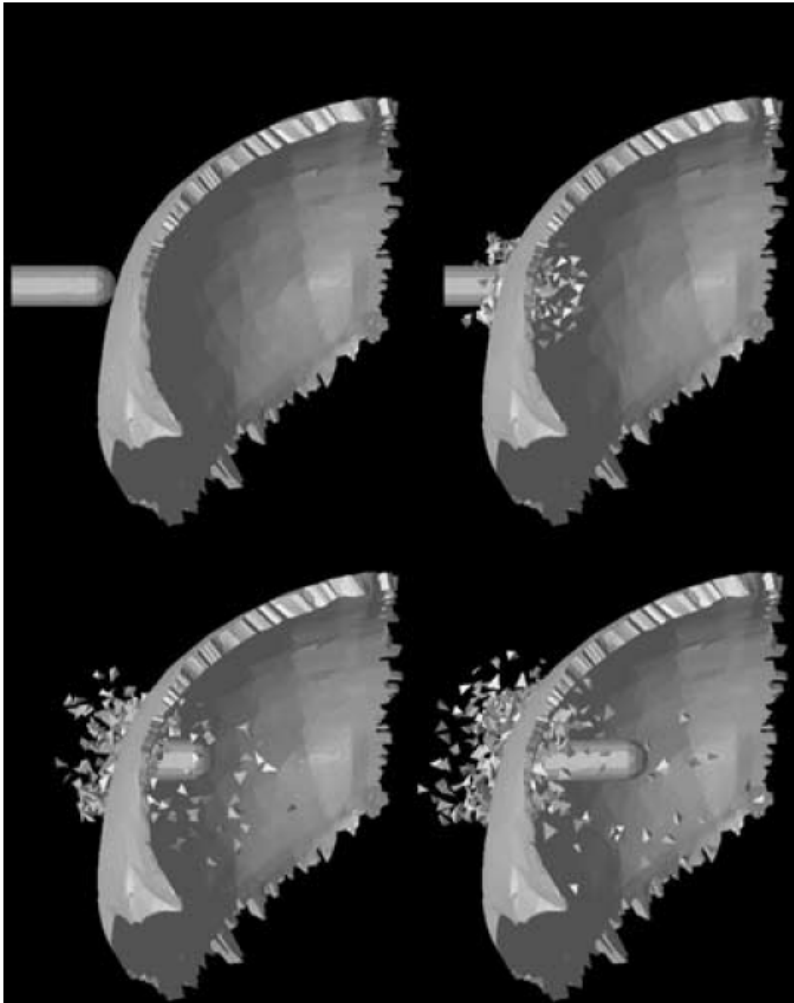
la fissure F peut se **propager** : **régime non-linéaire**

- $F = F(t) \implies \Omega(F(t))$
- Tout le reste étant fixé, la réponse élastique de $\Omega(F)$ dépend de F
- $F(t)$ pas connu *a priori* (longueur, direction) : **approche incrémentale**



Exemple : propagation de fissure

Finite-element simulation of firearm injury to the human cranium



1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires

Susceptibles d'apparaître en association avec solides élastiques linéaires HPP :

- *Contact unilatéral (avec ou sans frottement)*
- *Propagation de fissures*
- *Usure...*

Modèles de comportement non-linéaires de matériaux :

- *Endommagement ;*
- *Plasticité...*

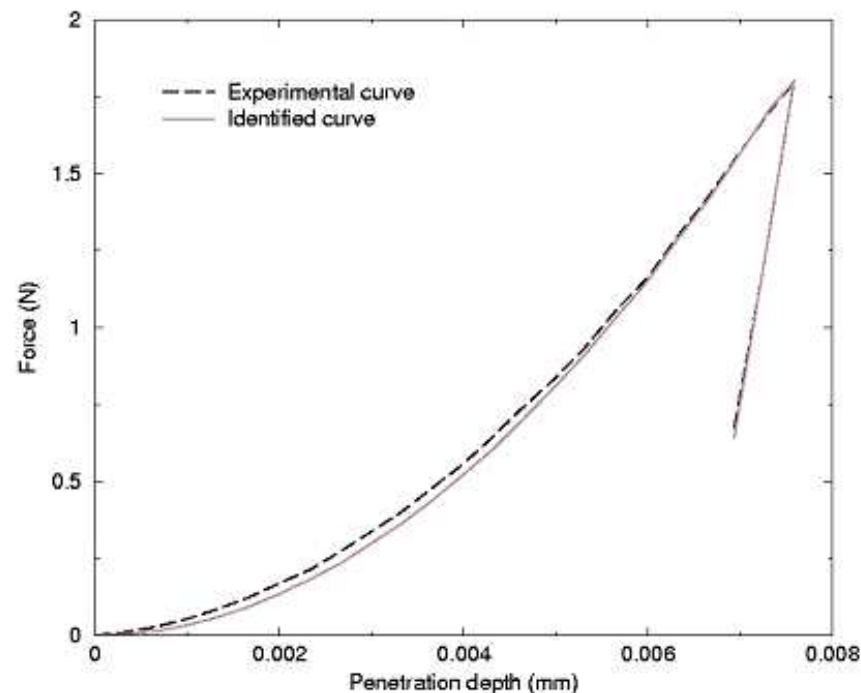
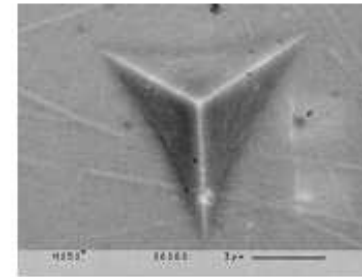
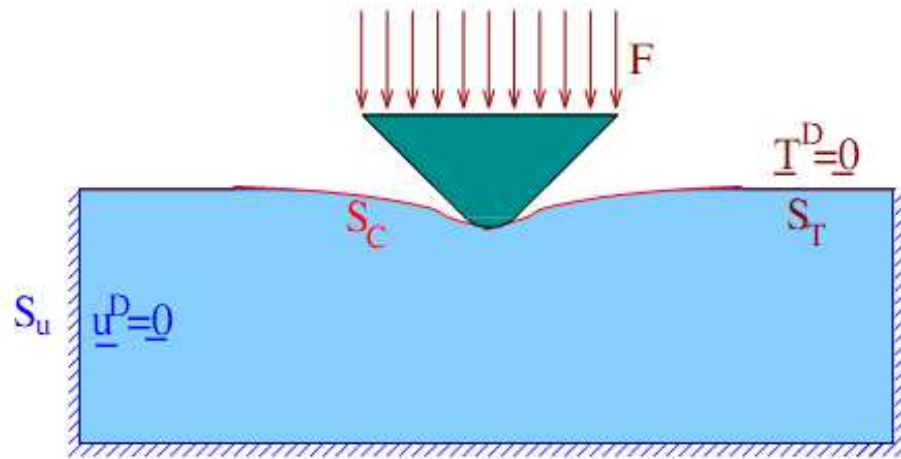


Comportements géométriquement non-linéaires de structures :

- *Transformations finies, flambage ...*

1. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
2. Comportement élastoplastique (rappels)

Exemple : caractérisation de matériaux par indentation



Courbe d'indentation mesurée (pointillé)
Courbe d'indentation calculée (plein)
pour les paramètres matériau **identifiés**.

[Constantinescu, A. et Tardieu, N., 2001]

Exemple : endommagement

Représentation à l'échelle macroscopique de l'effet de la présence dans un matériau de microdéfauts (fissures...) évolutifs

Exemple : modèles d'endommagement fragile :

- ▶ **Les microdéfauts modifient les propriétés macroscopiques d'élasticité :**

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\alpha) \quad \alpha : \text{variable (scalaire ou tensorielle) d'endommagement}$$

Exemple : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0(1 - \alpha)$.

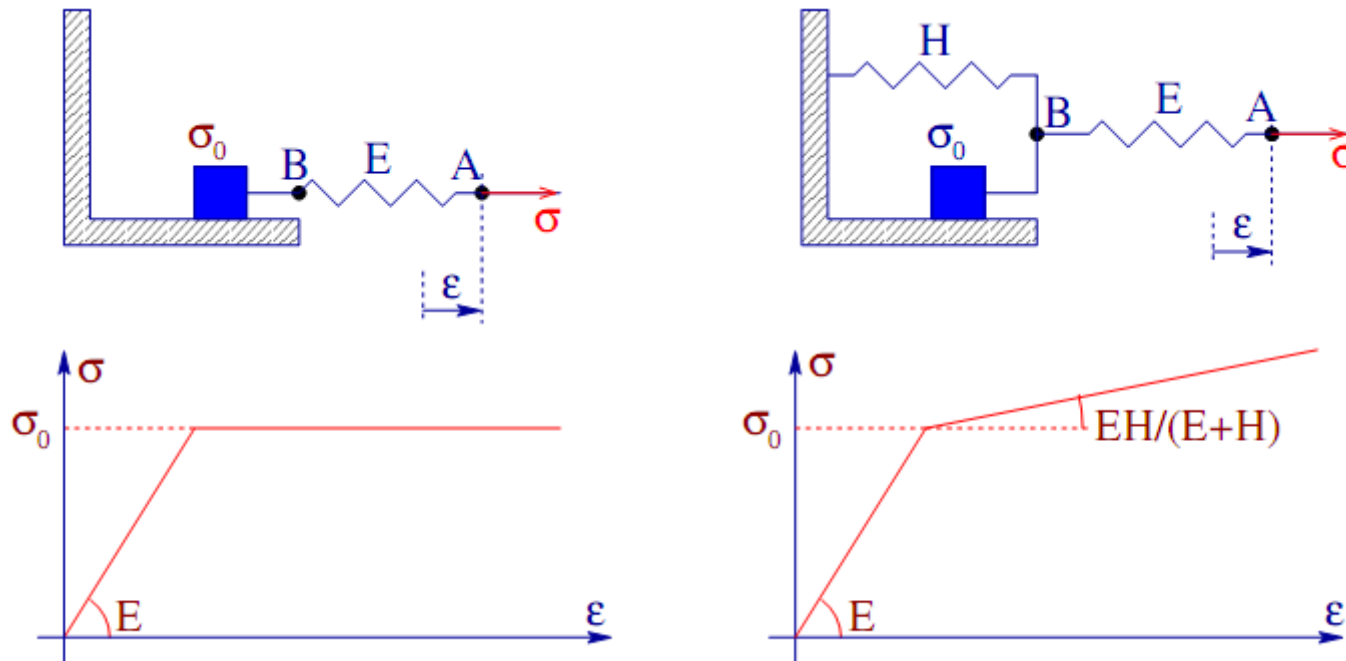
- ▶ **L'endommagement est irréversible et évolue selon une loi à seuil :**

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A}(\alpha) : \underline{\underline{\varepsilon}} < w_{\text{critique}} & \dot{\alpha} = 0 \\ \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A}(\alpha) : \underline{\underline{\varepsilon}} = w_{\text{critique}} & \dot{\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ **Pour un solide : notion de champ d'endommagement $\alpha(\underline{x})$.**

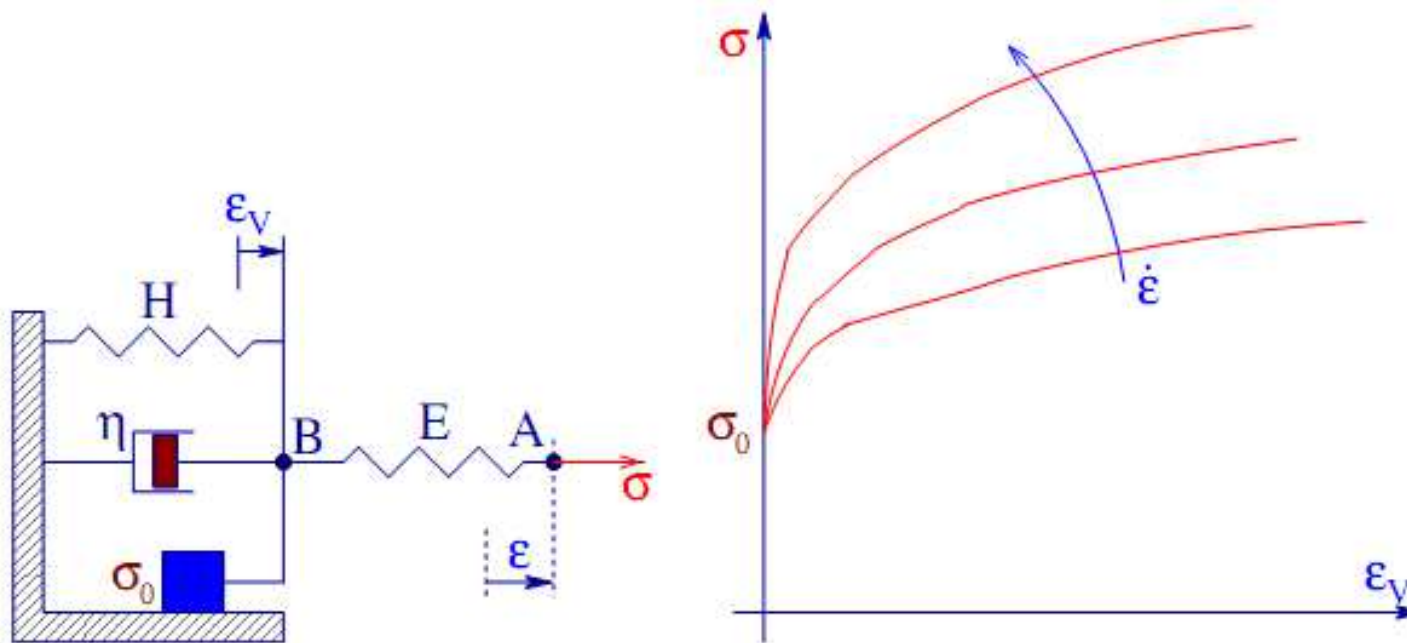
Comportement non linéaires de matériaux (non linéarités physique)

Comportement élastoplastique :



Comportement non linéaires de matériaux (non linéarités physique)

Comportement viscoplastique :



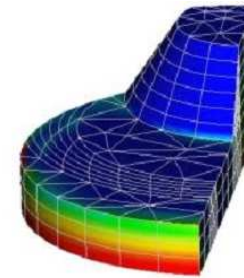
$$\eta \dot{\varepsilon}_V = \max(0, |\sigma - H\varepsilon_V| - \sigma_0) \text{signe}(\sigma - H\varepsilon_V)$$

Exemple (elastoplasticité) : fouille circulaire (Nantes)

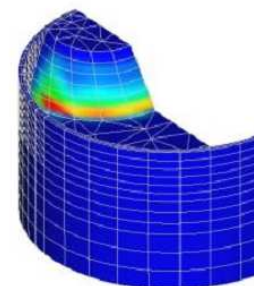
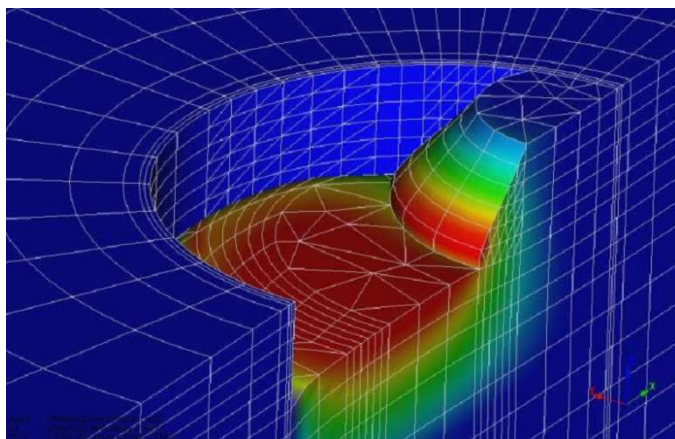
Laboratoire central des ponts et chaussées, 2003)



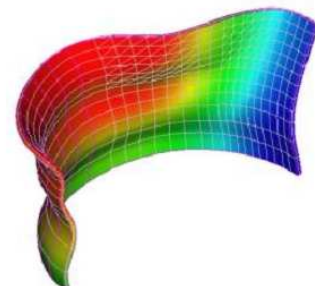
Sol : comportement élastoplastique
Paroi cylindrique : comportement élastique
Excavation réalisée en plusieurs phases



Contrainte équivalente de von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{3/2} \|\underline{\underline{\sigma}} - \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}/3)\underline{\underline{1}}\|$ (sol)



Déformation plastique cumulée (sol)



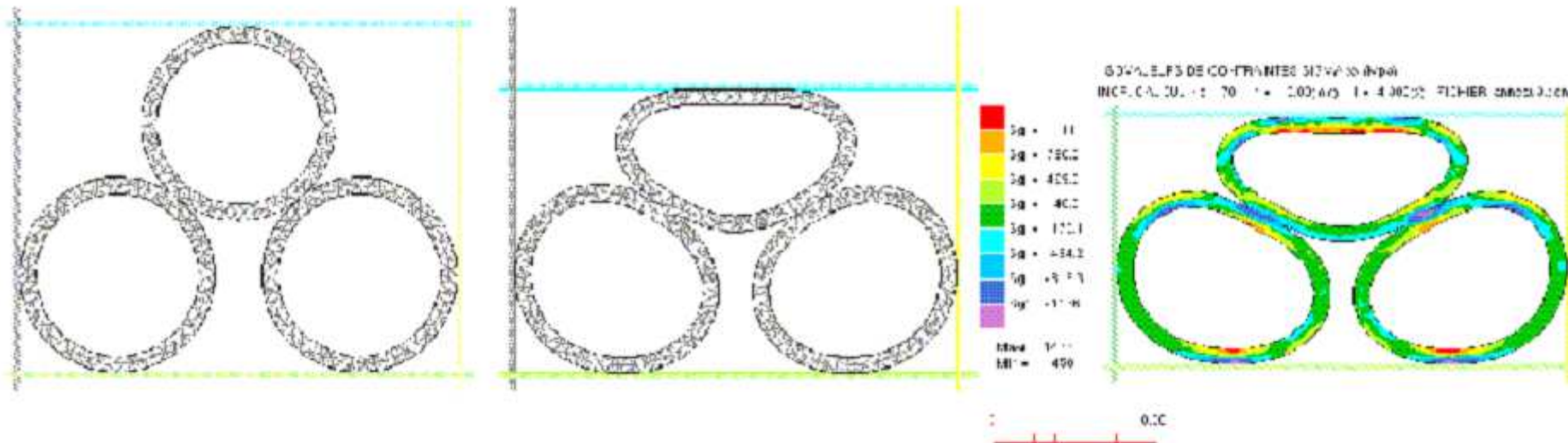
Déformée finale (paroi)

Maillage excavation + paroi + sol extérieur à paroi, avec déplacement vertical (couleurs)

Juxtaposition de plusieurs non linéarités

Exemple : modélisation d'un essai de compactage de coques

(Transformations finies + contact)



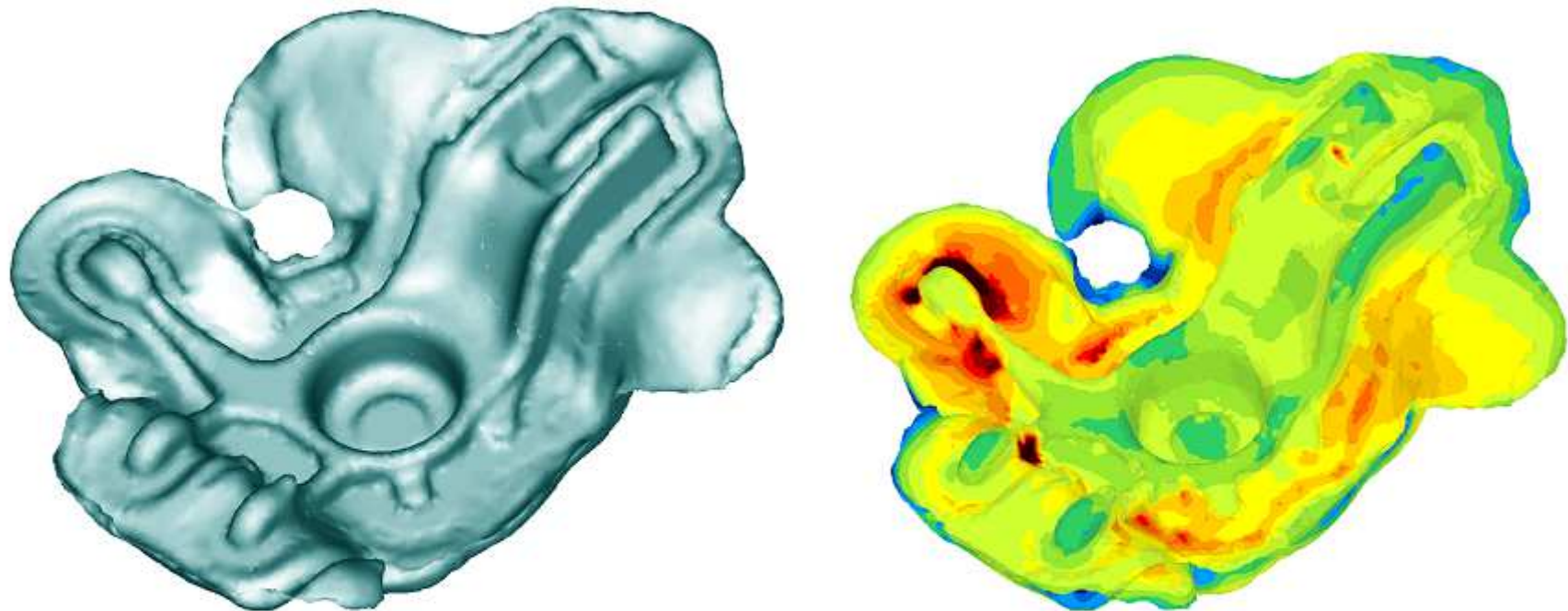
Modélisation de l'essai, et visualisation du champ de contraintes

[Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), Ecole des Mines de Paris]

Juxtaposition de plusieurs non linéarités

Exemple : mise en forme

(Plasticité, transformations finies + contact)



**Forgeage à chaud d'un pivot de fusée pour automobile. Simulation avec FORGE3.
Forme finale de la pièce et distribution de la déformation plastique**
[Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF), Ecole des Mines de Paris]

1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires

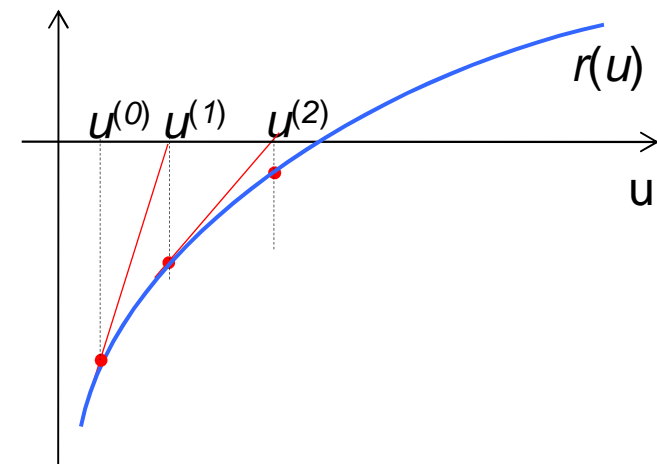


Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires

(exemple en élasticité non linéaire)

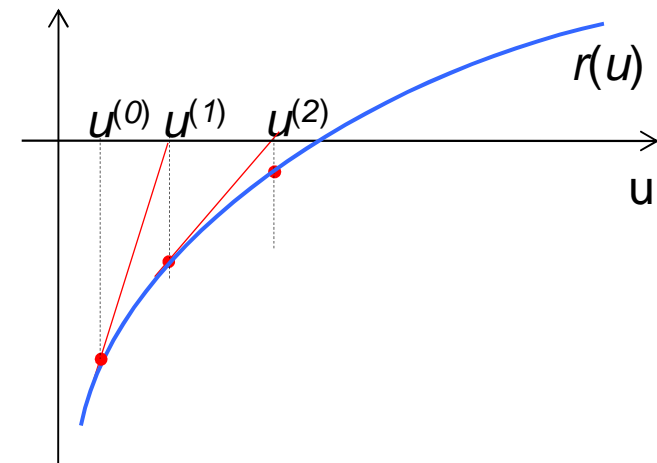
3. Comportement élastoplastique (rappels)



1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires

Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires
(exemple en élasticité non linéaire)



3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas équation scalaire non linéaire

Trouver u tel que $r(u)=0$

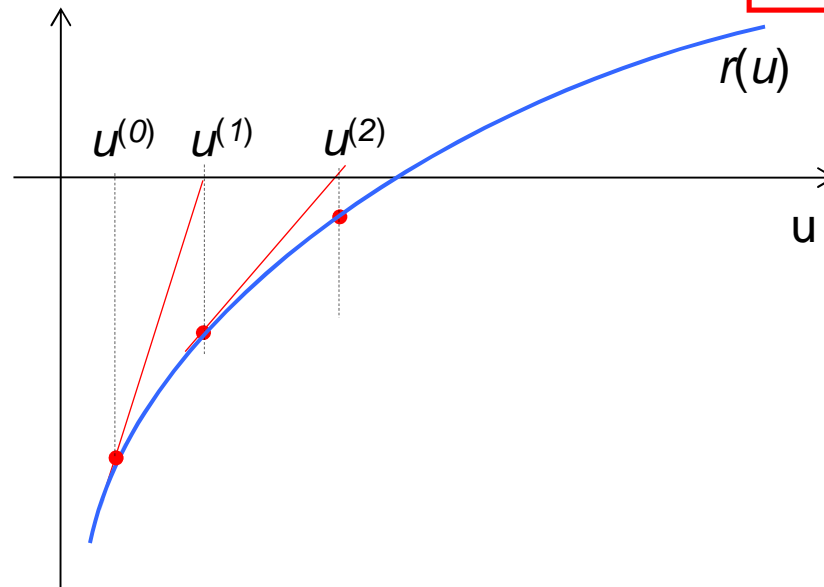
Procédure itérative : construction d'une séquence $u^{(k)} \rightarrow u$ tel que $r(u)=0$

Méthode de Newton-Raphson:

Développement limité au premier ordre de $r(u^{(k+1)})$ autour de $u^{(k)}$

Puis résolution du problème linéaire associé

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]r'(u^{(k)}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$



L'algorithme de Newton-Raphson

Initialisation : $u^{(0)}$ (par exemple $u^{(0)} = 0$)

Calcul du Résidu : $r(u^{(0)})$

Itération : $k \rightarrow k+1$

Résoudre : $\delta u^{(k)} = - [r'(u^{(k)})]^{-1} r(u^{(k)})$

Actualisation : $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \delta u^{(k)}$

Calcul résidu : $r(u^{(k+1)})$

Test de convergence : Si $|r(u^{(k+1)})| < \varepsilon r(u^{(0)}) \implies > \text{fin}$

Typiquement : $\varepsilon = 10^{-6}$

Convergence quadratique de l'algo. Newton-Raphson

Soit $e^{(k)} = u^{(k)} - u$ (erreur / solution) pour tout k , on a:

$$e^{(k+1)} - e^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)} = -\frac{r(u^{(k)})}{r'(u^{(k)})}$$

Développement limité de $r(u^{(k)})$ et $r'(u^{(k)})$ autour de la solution exacte u

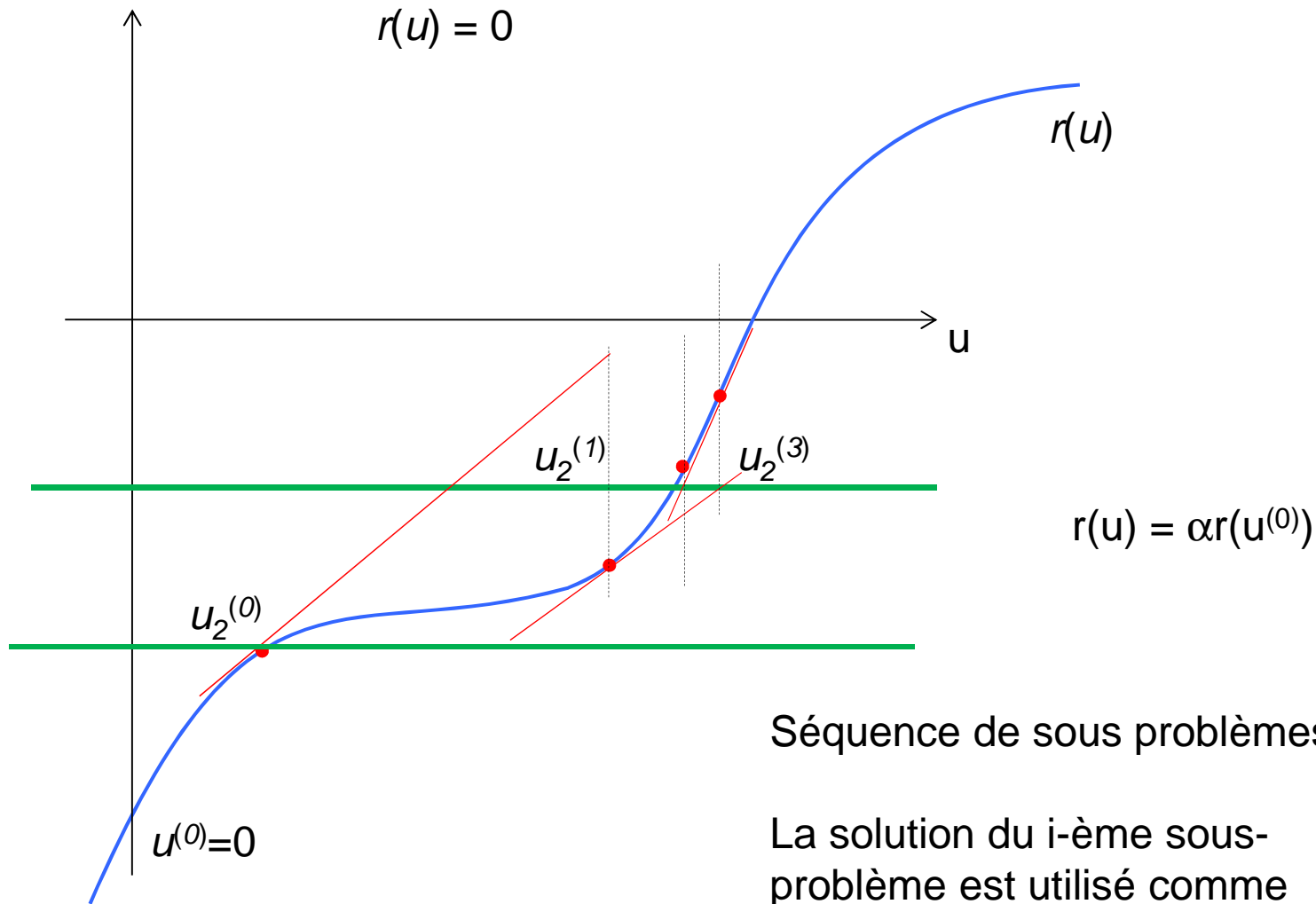
$$\exists \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \longrightarrow \quad r(u^{(k)}) = r'(u)e^{(k)} + \frac{1}{2}r''(u + \alpha e^{(k)})(e^{(k)})^2$$

$$\exists \beta, 0 \leq \beta \leq 1 \quad \longrightarrow \quad r'(u^{(k)}) = r'(u) + r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}$$

$$e^{(k+1)} = \frac{2r''(u + \beta e^{(k)}) - r''(u + \alpha e^{(k)})}{2r'(u) + 2r''(u + \beta e^{(k)})e^{(k)}} (e^{(k)})^2 = O(|e^{(k)}|^2)$$

Algorithme de Newton-Raphson : Convergence quadratique
(au voisinage de la solution)

Convergence de l'algorithme de Newton-Raphson



Séquence de sous problèmes

La solution du i -ème sous-problème est utilisé comme initialisation du $(i+1)$ ème sous-problème

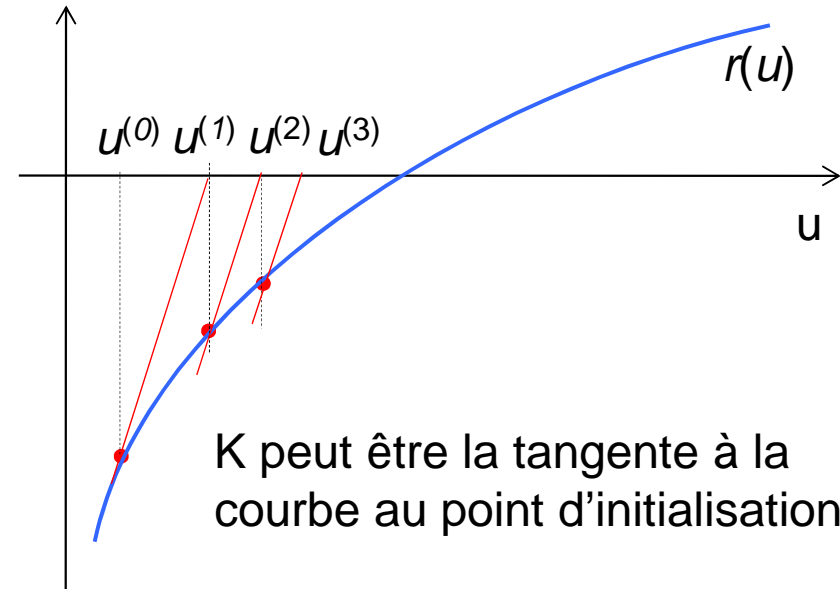
Newton-Raphson Modifié - 1

$r'(u)$ est remplacé par une constante K , ce qui donne

$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}]K = 0$$

i.e.

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{r(u^{(k)})}{K}$$



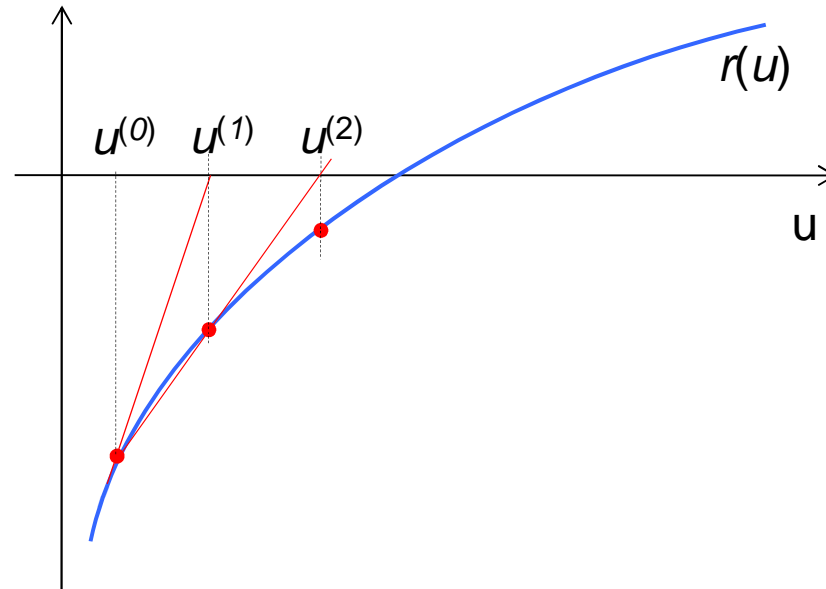
La convergence est seulement linéaire (proche de la solution)

$$e^{(k+1)} = \left(1 - \frac{r'(u)}{K}\right)e^{(k)} + o(|e^{(k)}|) = O(|e^{(k)}|)$$

Not interesting in the scalar case $r(u) = 0$;
Extension to the vector case $\{\mathbb{R}(\mathbf{U})\} = \{0\}$ sometimes useful.

Newton-Raphson Modifié - 2

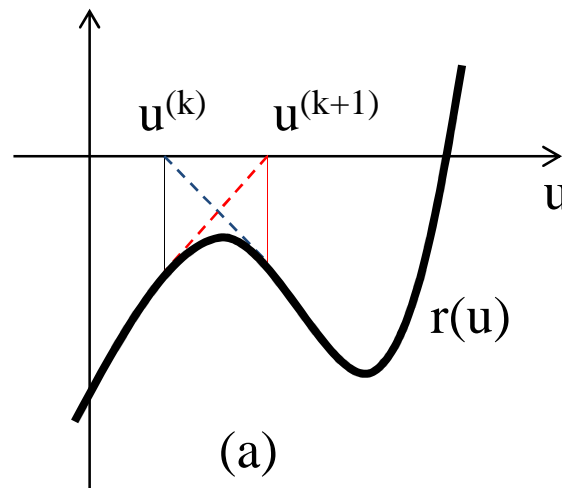
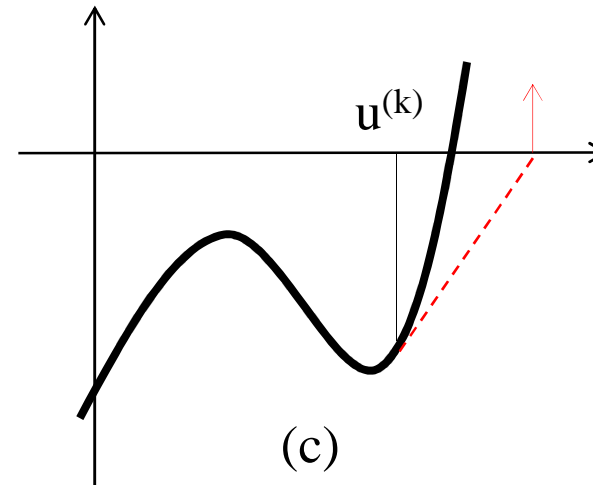
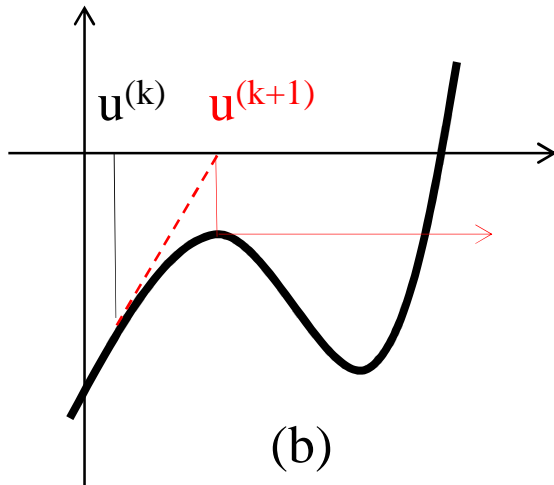
Opérateur sécant (Employ line segment passing through the two previous estimates)



$$r(u^{(k+1)}) \approx r(u^{(k)}) + [u^{(k+1)} - u^{(k)}] \frac{r(u^{(k)}) - r(u^{(k-1)})}{u^{(k)} - u^{(k-1)}} = 0$$

It can be shown that $|e^{(k+1)}| = O(|e^{(k)}|^{(1+\sqrt{5})/2})$: slower convergence than with standard Newton method, but faster than with modified Newton approach 1. $(1 + \sqrt{5})/2$ is the golden number...

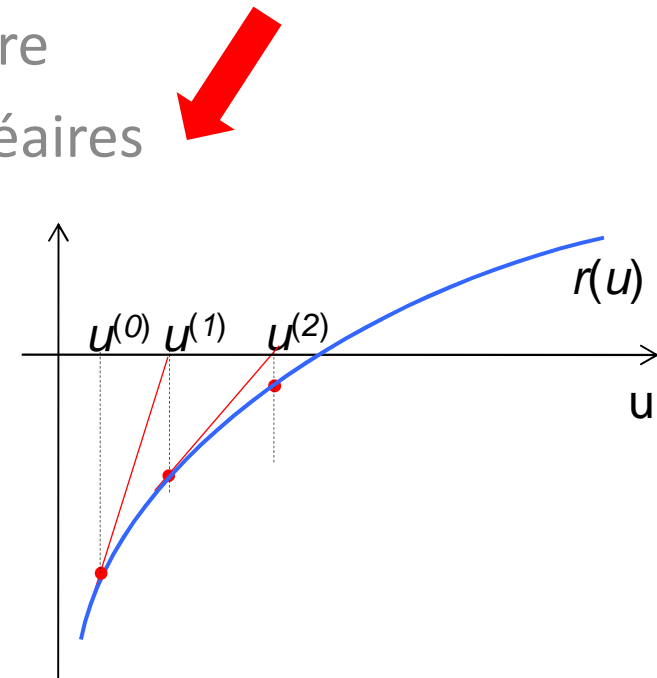
Cas de divergence de Newton-Raphson



1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires

Cas d'une équation scalaire nonlinéaire

Cas d'un système d'équations non linéaires
(exemple en élasticité non linéaire)



3. Comportement élastoplastique (rappels)

Elasticité non linéaire - HPP

Comportement élastique non linéaire :

$\phi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ (densité d'énergie libre, convexe)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

Forme générique;
Non linéaire en
général

➤ Forme faible des équations (PPV)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}]) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{v}}] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{v}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{v}} d\Gamma = 0 \quad \forall \underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$$

➤ Compatibilité géométrique + loi de comportement == > **equations non linéaires**

$$\text{Trouver } \underline{\underline{u}} \in C(U^D) \text{ tel que } R(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{v}}) = 0 \quad \forall \underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$$

avec le résidu défini par :

$$R(\underline{\underline{u}}; \underline{\underline{v}}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}([\underline{\underline{u}}])) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{v}}] d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{v}} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{v}} d\Gamma$$

➤ **Objectif de la résolution itérative :**

construire une séquence $\underline{\underline{u}}^{(k)}$ qui converge vers la solution $\underline{\underline{u}}$ de $R(\underline{\underline{u}}; \cdot) = 0$

➤ **Interpolation EF** de $\underline{\underline{u}} \in C(U^D)$ et $\underline{\underline{v}} \in C(\underline{\underline{0}})$

== > système d'équations non linéaires

Elasticité non linéaire – Méthode de Newton-Raphson

Trouver $\underline{u} \in C(\underline{U}^D)$ tel que $R(\underline{u}; \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

- Application linéaire tangente R' de R

$$R(\underline{v} + \underline{z}; \underline{w}) - R(\underline{v}; \underline{w}) = \langle R'(\underline{v}; \underline{w}), \underline{z} \rangle + o(\|\underline{z}\|)$$

- Méthode de Newton (pb continu)

Partant de l'estimation $\underline{u}^{(k)}$ trouver $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$ avec $\delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0})$

Linéarisation autour de $\underline{u}^{(k)}$

$$R(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) \approx R(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \langle R'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = 0$$

L'estimation $\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$ est alors solution du problème **linéaire** :

$$\text{Trouver } \delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0}) \text{ tel que } \langle R'(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}), \delta \underline{u}^{(k)} \rangle = -R(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) \quad (\forall \underline{w} \in C(\underline{0}))$$

Elasticité non linéaire – Application linéaire tangente

$$\mathcal{R}(\underline{u}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}]) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

$$\leftarrow \underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \delta \underline{u}^{(k)}$$

Linéarisation des contraintes w.r.t. $\delta \underline{u}^{(k)}$

$$\sigma_{ij}[\underline{u}^{(k+1)}] = \sigma_{ij}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ml}}[\underline{u}^{(k)}] \delta \varepsilon_{ml}^{(k)}$$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{(k)} = \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$

$$\sigma_{ij}[\underline{u}^{(k+1)}] = \sigma_{ij}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] = \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] + \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]$$



$\mathcal{A}^{(k)}$

$$\mathcal{A}_{ijml}^{(k)} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ml}}[\underline{u}^{(k)}]$$

Pour un $\underline{u}^{(k)}$ donné
Les composantes du
tenseur découle de la
La loi de comportement

Elasticité non linéaire – Application linéaire tangente

➤ Résidu à l'itération : $k+1$

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

➤ Développement limité de $\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}]$ autour de $\underline{u}^{(k)}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k+1)}] = \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] + \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

➤ Développement limité de $\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w})$ autour de $\underline{u}^{(k)}$:

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k+1)}; \underline{w}) = \mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV + o(\|\underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}]\|)$$

$$\mathcal{R}(\underline{u}^{(k)}; \underline{w}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}^{(k)}] : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS$$

Pour un $\underline{u}^{(k)} \in C(\underline{U}^D)$ donné, trouver $\delta \underline{u}^{(k)} \in C(\underline{0})$ tel que, $\forall \underline{v} \in C(\underline{0})$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] d\Omega + R(\underline{u}^{(k)}, \underline{w}) = 0$$

Elasticité non linéaire – Approximation Elément Finis

➤ Approximation EF

$$\implies \Omega_h, \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{u}^D), \delta \underline{u}_h^{(k)} \in \mathcal{C}_h(\underline{0}), \underline{w} \in \mathcal{C}_h(\underline{0})$$

➤ Résidu discret défini par

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{R}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}}(\underline{\varepsilon}[\underline{u}_h^{(k)}]) \right) : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV - \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS$$

➤ Matrice de rigidité tangente définie par

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV$$

➤ La correction $\{\delta \mathbb{U}^{(k)}\}$ est solution du problème linéaire tangent

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

Quelques remarques sur le calcul des intégrales

Matrice de rigidité tangente définie par

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}^{(k)}] \{\delta \mathbb{U}^{(k)}\} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{\underline{u}}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV$$

$$= \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{\underline{u}}_h^{(k)}] : \mathcal{A}^{(k)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{w}}] dV$$

$$\{\varepsilon[\underline{\underline{w}}](\underline{\underline{x}})\} = [B_e(\underline{\underline{a}})] \{\mathbb{W}_e\}$$

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \left(\sum_{g=1}^{n_g} [B_e(\underline{\underline{a}}_g)]^T [A^{(k)}(\underline{\underline{a}}_g)] [B_e(\underline{\underline{a}}_g)] w_g \right) \{\delta \mathbb{U}_e^{(k)}\}$$

La loi de comportement est imposée seulement aux Points de Gauss !

Résolution d'un système d'équations non linéaire par l'algorithme de Newton-Raphson

- 1 Initialization : $\{\mathbf{U}^{(0)}\}$ (often, $\{\mathbf{U}^{(0)}\} = \{0\}$),
Compute initial residuum $\{\mathbf{R}^{(0)}\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)})\}$
- 2 For $k = 0, 1, \dots$ repeat :
 - (i) Compute $[\mathbb{K}^{(k)}]$ (tangent stiffness matrix) ;
 - (ii) $\{\mathbf{U}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{U}^{(k)}\} + [\mathbb{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbf{R}^{(k)}\}$ (new estimate) ;
 - (iii) $\{\mathbf{R}^{(k+1)}\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(k+1)})\}$ (new residuum) ;
 - (iv) $\|\{\mathbf{R}^{(k+1)}\}\| \leq \epsilon$? (convergence test) :
 - If yes : **STOP**, $\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}^{(k+1)}\}$
 - If no, set $k \leftarrow k + 1$ and goto 2.(i)

Remarques :

- 1- Bonnes propriétés de convergence (quadratique) ; peu d'itérations
- 2- L'opérateur tangent $[\mathbb{K}^{(k)}]$ doit être calculer **à chaque itération**
== > cout potentiellement important

Convergence quadratique proche de la solution

Setting $\{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\mathbb{U}^{(k)}\} - \{\mathbb{U}\}$ (error w.r.t. solution) for every k , one has :

$$\{\mathbb{E}^{(k+1)}\} - \{\mathbb{E}^{(k)}\} = \{\delta\mathbb{U}^{(k)}\} = -[\mathbb{K}^{(k)}]^{-1}\{\mathbb{R}^{(k)}\}$$

Series expansion of $\{\mathbb{R}^{(k)}\}$ around $\{\mathbb{R}\} = \{0\}$ and for $[\mathbb{K}^{(k)}]$ around the exact solution :

$$\exists\alpha, \quad \mathbb{R}_I^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)}\mathbb{E}_J^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_J^{(k)} \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2)$$

$$\exists\beta, \quad \mathbb{K}_{IJ}^{(k)} = \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)} + \frac{\partial^2 \mathbb{R}_I}{\partial \mathbb{U}_J \partial \mathbb{U}_K} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) \mathbb{E}_K^{(k)} + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_I^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \mathbb{K}_{IJ}^{(\infty)-1} \left[\frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \beta \mathbb{E}^{(k)}\}) - 2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}_J}{\partial \mathbb{U}_K \partial \mathbb{U}_L} (\{\mathbb{U} + \alpha \mathbb{E}^{(k)}\}) \right] \mathbb{E}_K^{(k)} \mathbb{E}_L^{(k)} \\ &\quad + o(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \\ &= O(\|\mathbb{E}^{(k)}\|^2) \end{aligned}$$

Elasticité non linéaire – opérateur tangent constant

$$\{\mathbb{R}^{(k)}\} + [\hat{\mathbb{K}}]\{\delta\mathbb{U}^{(k)}\} = \{0\}$$

où la matrice de rigidité $[\hat{\mathbb{K}}]$ (définie positive) est arbitraire, par exemple

$$\mathcal{A}^{(0)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{0}}) \quad (\text{Tenseur d'élasticité à l'état naturel})$$

Algorithme de Newton modifié :

- (i) Convergence plus lente (linéaire) ; plus grand nombre d'itérations
- (ii) Réduction du cout de calcul à chaque itération
(la matrice tangente est calculée et factorisée LDL^T une seule fois)

Autre variantes :

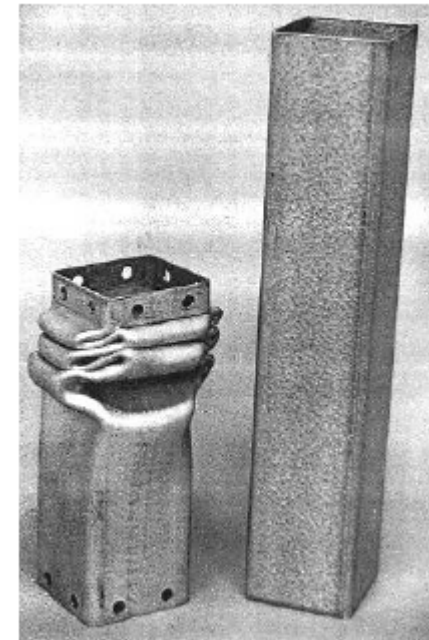
- (i) Variante « classique » : la matrice de rigidité mise à jour seulement toutes les m itérations
- (ii) Variante « sécante »

1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels) 

Cas 1D

Extension au cas général

Synthèse



dissipators employed
in crash tests

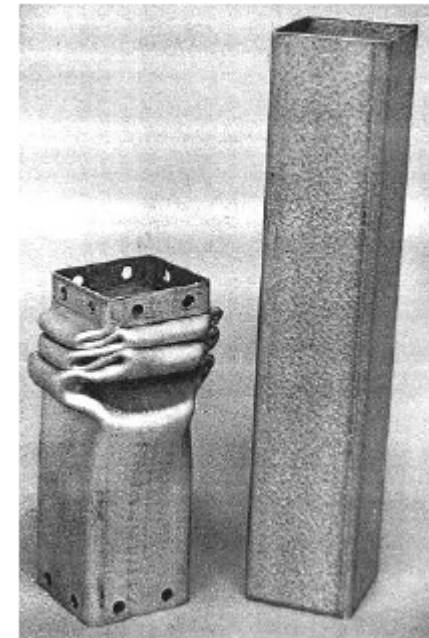
1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D



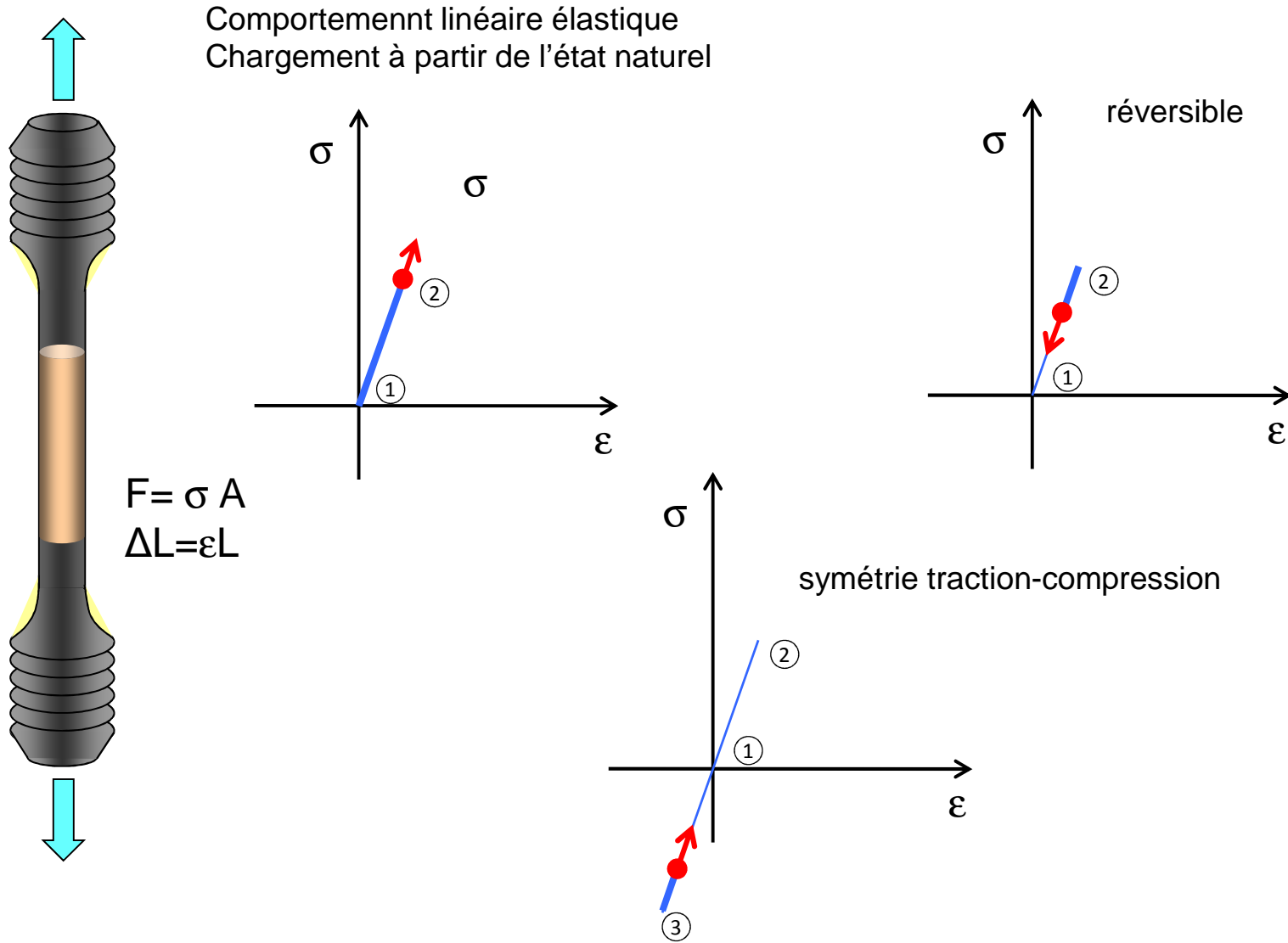
Extension au cas général

Synthèse

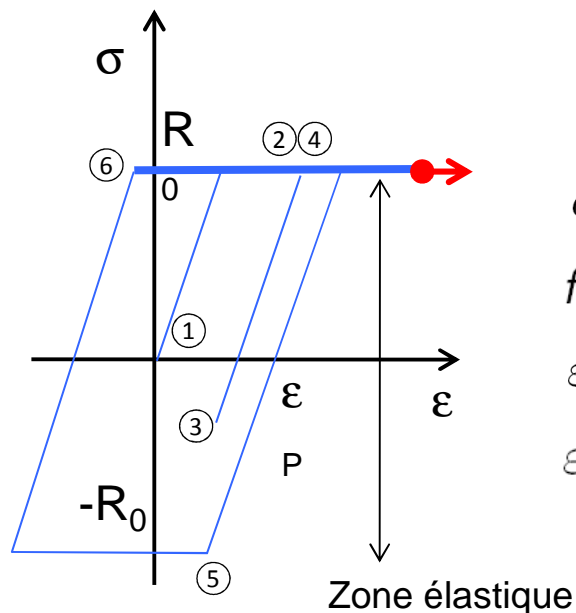
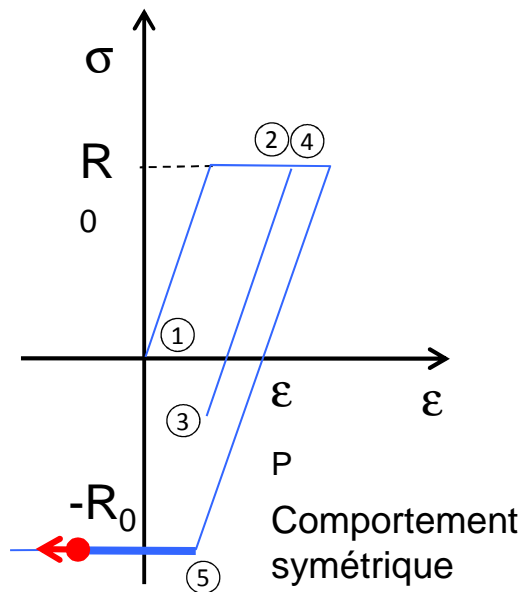
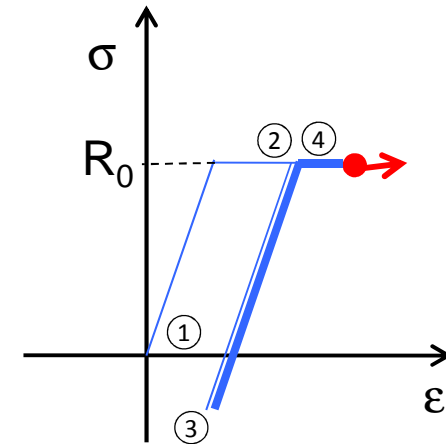
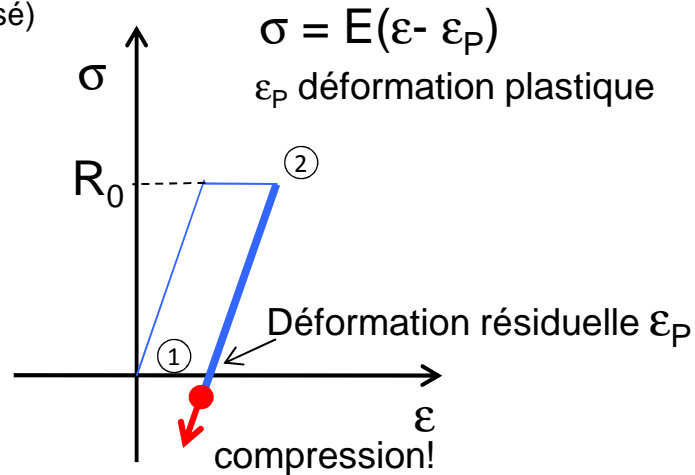
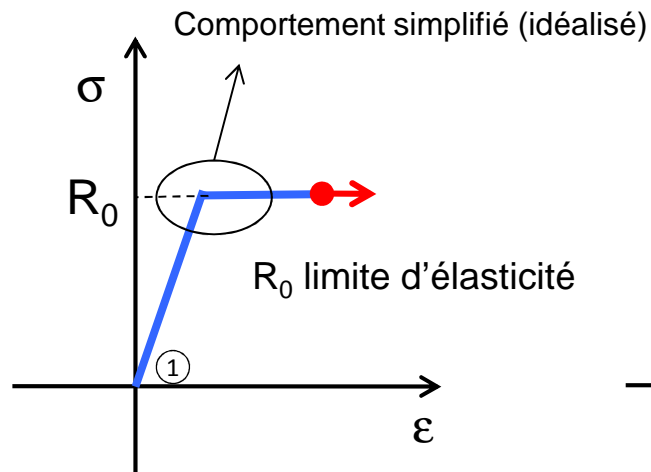


dissipators employed
in crash tests

Mise en évidence expérimentale : cas 1D



Mise en évidence expérimentale : cas 1D (comportement idéalisé)



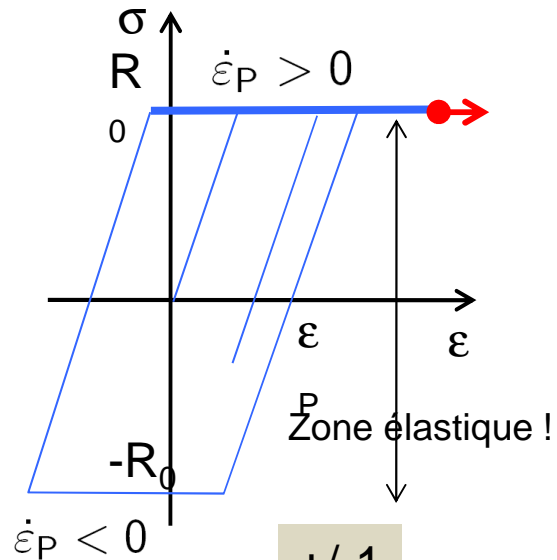
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad \text{if} \quad f(\sigma) < 0$$

$$\dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad \text{only if} \quad f(\sigma) = 0$$

Formulation de modèle élastique-parfaitement plastique



$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) = E\varepsilon_E$ Déformation élastique vs. plastique

$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0$ Fonction de charge
(domaine d'élasticité)

$\dot{\varepsilon}_P = 0$ if $f(\sigma) < 0$ Pas de déformation plastique
à l'intérieur du domaine d'élasticité

$\dot{\varepsilon}_P \neq 0$ only if $f(\sigma) = 0$ Evolution de la
déformation plastique
ssi on est sur le bord
du domaine élastique

+/-1

γ multiplicateur plastique

$$\dot{\varepsilon}_P = \frac{df}{d\sigma} \dot{\gamma} \quad \dot{\gamma} \geq 0$$

Règle de normalité: $df/d\sigma$ est un vecteur
"orthogonal" au domaine élastique

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) \quad \dot{\varepsilon}_P = \frac{df}{d\sigma} \dot{\gamma} \quad \text{normalité}$$

fonction de charge

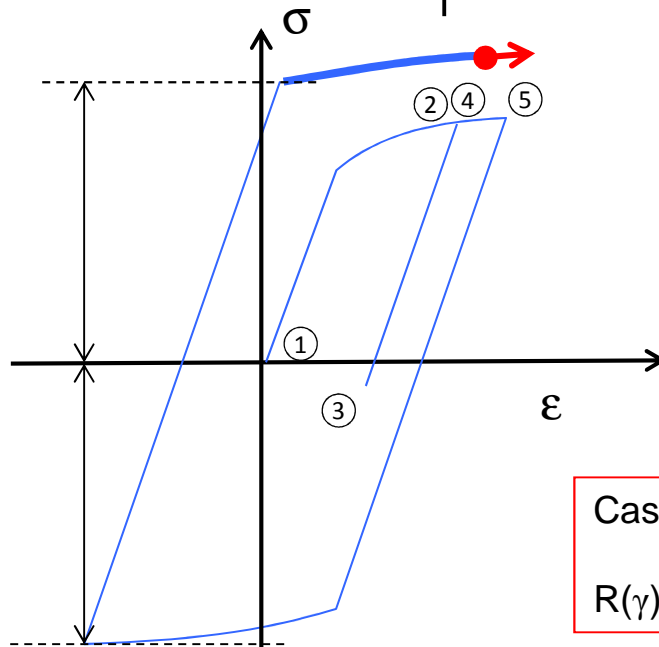
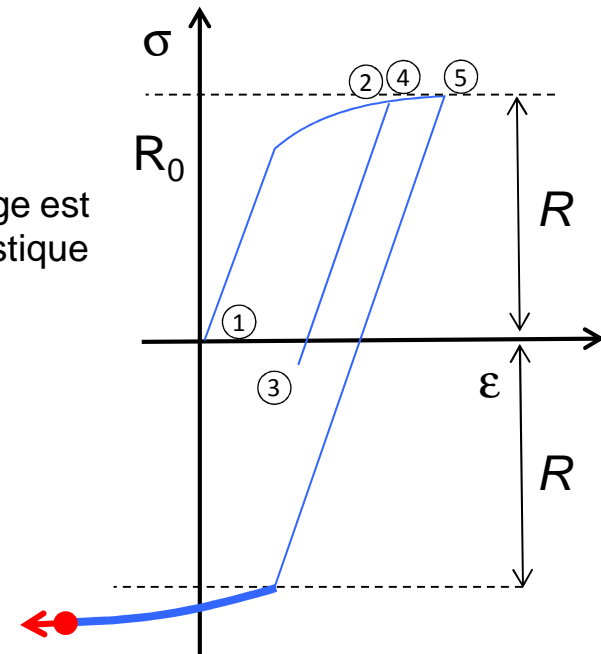
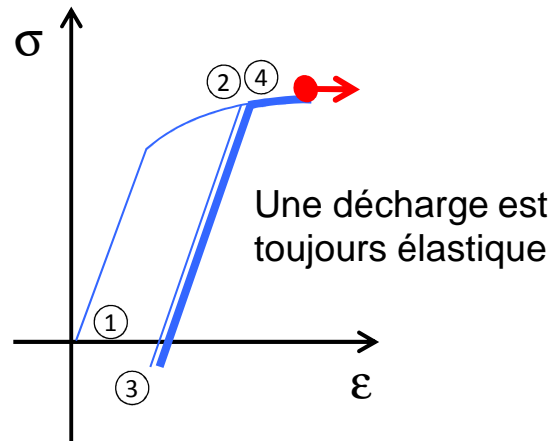
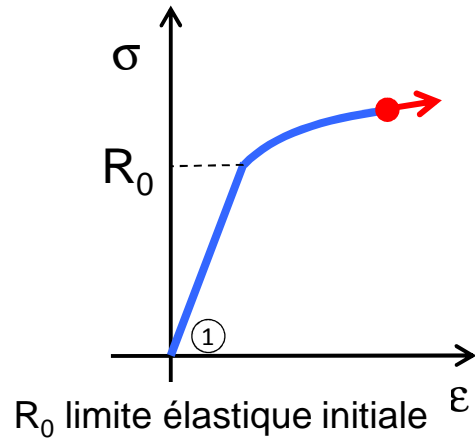
Multiplicateur plastique

complementarité

$$f(\sigma) = |\sigma| - R_0 \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\sigma)\dot{\gamma} = 0$$

Mise en évidence expérimentale : écrouissage – cas isotrope

Écrouissage; si le chargement continue après la limite élastique, la limite élastique évolue



Le domaine élastique s'étend de manière symétrique

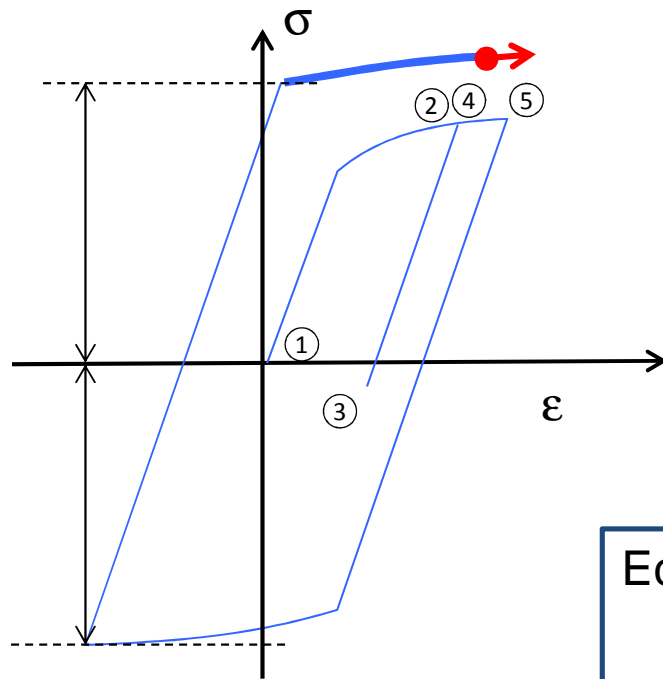
$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0$$

avec $R(\gamma)$ croissante et concave

Cas particulier – écrouissage linéaire :
 $R(\gamma) = \sigma_0 + H \gamma$

Formulation du modèle

élastique-plastique avec écrouissage isotrope



$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) = E\varepsilon_E \quad \text{Déformation élastique vs. plastique}$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0 \quad \text{Fonction de charge}$$

(domaine élastique)

$$\dot{\varepsilon}_P = 0 \quad \text{if} \quad f(\sigma) < 0 \quad \text{Pas de déformation plastique}$$

À l'intérieur du domaine élastique

$$\dot{\varepsilon}_P \neq 0 \quad \text{only if} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{Evolution de la}$$

déformation plastique
ssi on est sur le bord
du domaine élastique

Ecrouissage Isotropie est un exemple en général:

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\text{history of } \varepsilon_P) \leq 0$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_P) \quad \dot{\varepsilon}_P = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\gamma} \quad \text{normalité}$$

Fonction de charge

Multiplicateur plastique

complémentarité

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\sigma)\dot{\gamma} = 0$$

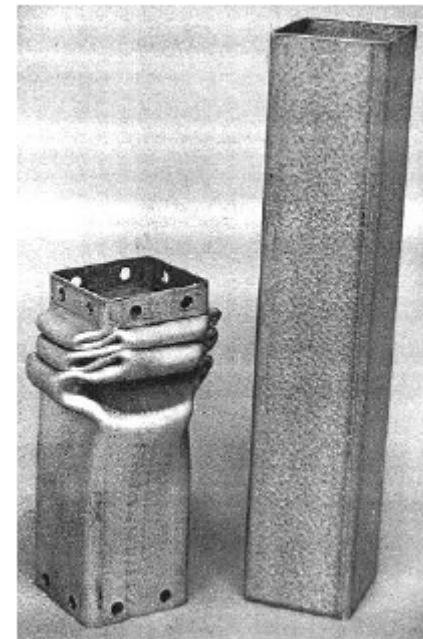
1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D

Extension au cas général



Synthèse



dissipators employed
in crash tests

Généralisation: domaine d'élasticité, limite élastique

Un grand nombre de matériaux présente un comportement élastique à l'intérieur d'un **certain domaine**

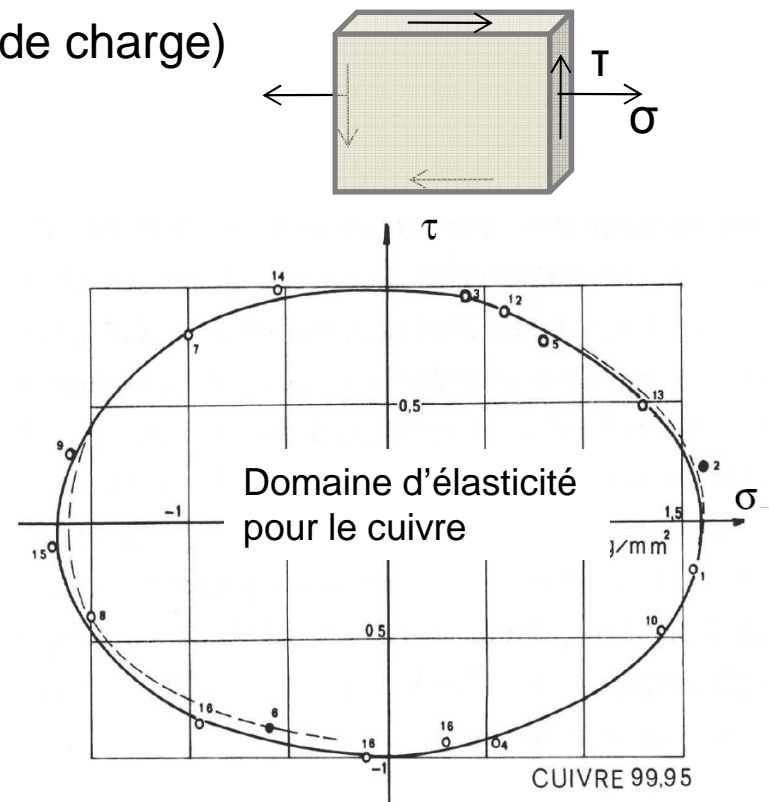
Domaine d'élasticité (à l'intérieur de la surface de charge) observé expérimentalement

if $f(\underline{\sigma}) < 0$: **elastic behaviour**

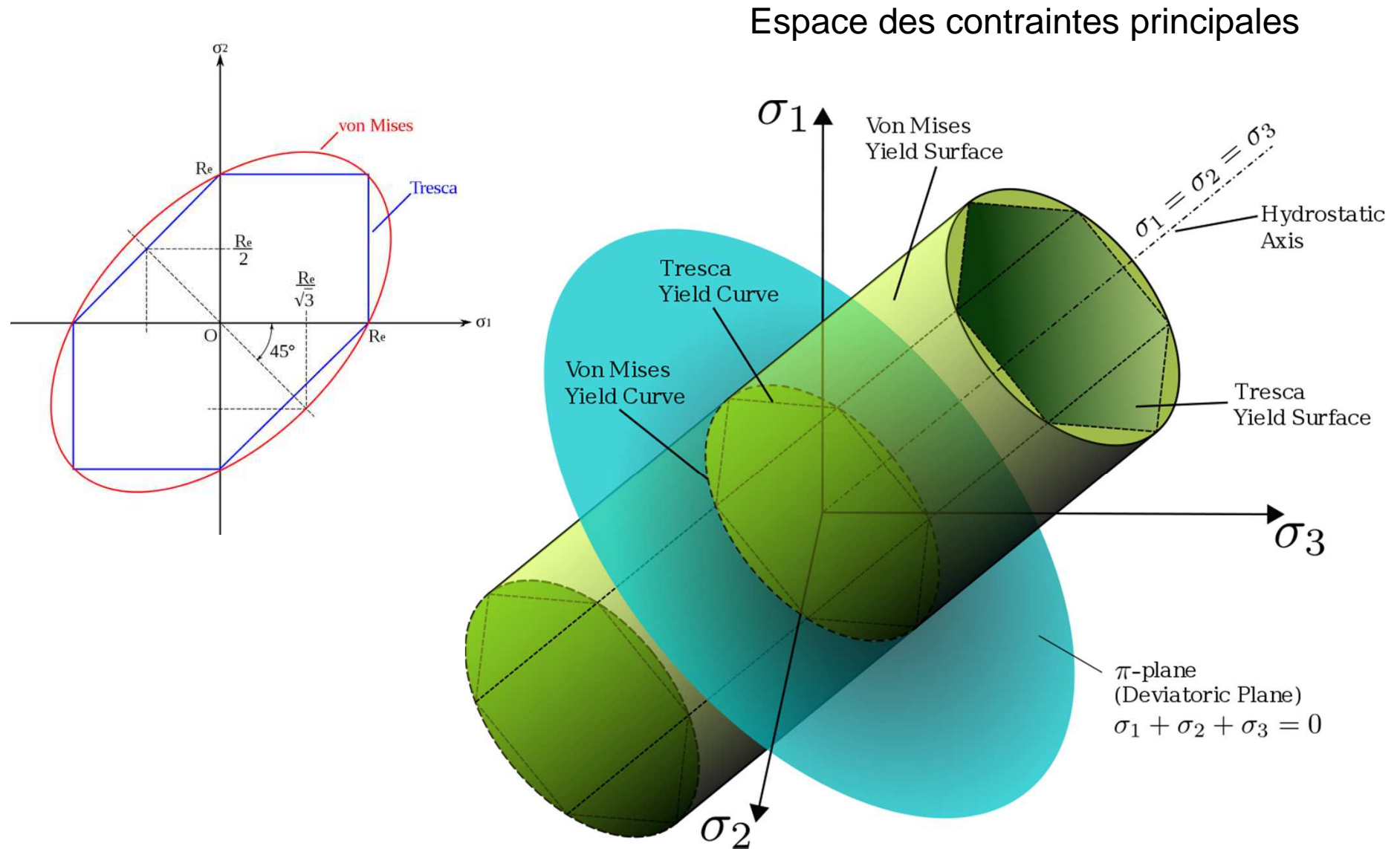
Si l'état de contrainte est à l'intérieur du domaine d'élasticité == > pas de d'évolution plastique

in 1D:

$$f(\sigma) = |\sigma| - R(\gamma) \leq 0$$



Exemple de surface de charge : Von Mises and Tresca



Critère de Von Mises (1913)

$$\sigma^{\text{eq}} - R \leq 0$$

$$\|\underline{s}\| = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \\ \sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{s}\| \\ \underline{s} = \underline{\sigma} - \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}}_{\text{Terme de pression}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Limite d'élasticité} \\ \text{Contrainte équivalente} \\ \text{Déviateur des contraintes} \end{array}$$

- **Limite indépendante de la pression**
- **Utilisé pour décrire la plasticité des métaux**
(déformation plastique due au cisaillement, dislocations du réseau cristallin)
- Pour une traction uniaxiale $\underline{\sigma} = \sigma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$ on a $\sigma^{\text{eq}} = \sigma$ (justification du coef $\sqrt{3/2}$)
- R : limite élastique observé sous un chargement de traction uniaxial

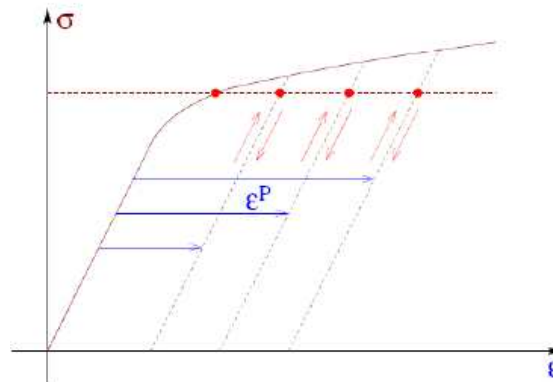
Déformation plastique

- Déformation élastique et plastique

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^E = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^P = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^E \quad \text{i.e.} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}^E = \mathcal{A} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^P)$$

- Pas d'évolution de la déformation plastique dans une évolution purement élastique du matériaux

- A un état de contraint peut correspondre à une infinité de valeur de $\underline{\underline{\varepsilon}}^P$



- Déformation plastique cumulée : une mesure du trajet de déformation plastique

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P(\tau)\| d\tau \quad \text{en uniaxial : } \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^P = \sigma^{\text{eq}} \dot{p}$$

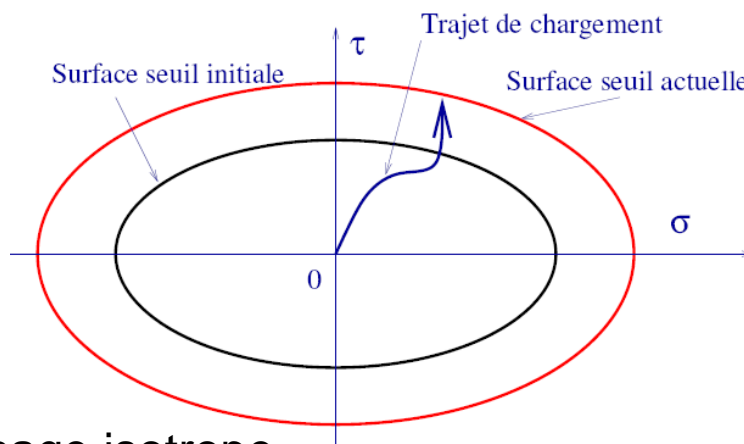
Evolution de la limite d'élasticité, écrouissage

Remarques:

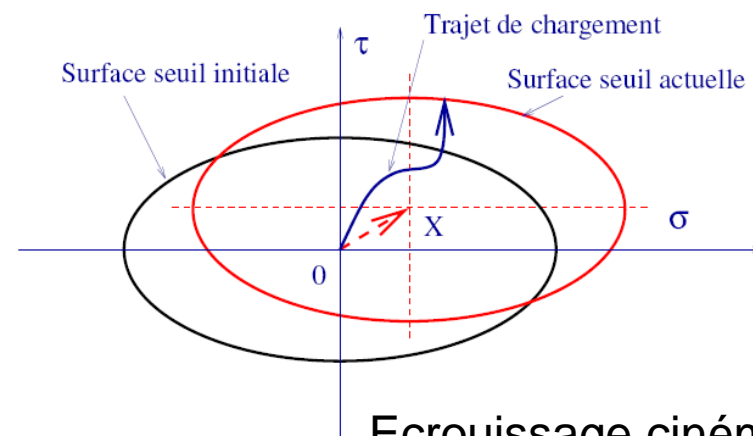
- Chargement peut augmenter la limite élastique initiale
- Si chargement au delà de la limite élastique (charge, décharge, recharge ...) : la **surface de charge évolue**
- Ce phénomène est appelé **écrouissage**
- La limite élastique évolue en fonction de la déformation plastique

Ecrouissage isotrope :

$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma^{eq} - R \leq 0$ La limite élastique R dépend de l'histoire de la déformation plastique



Ecrouissage isotrope

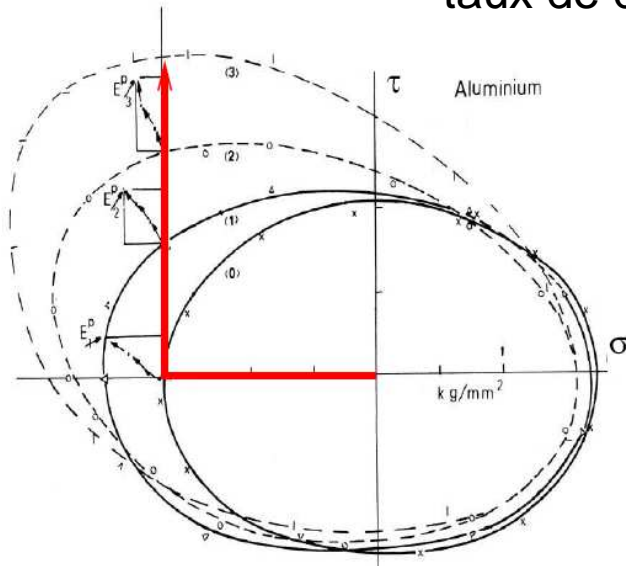


Ecrouissage cinématique

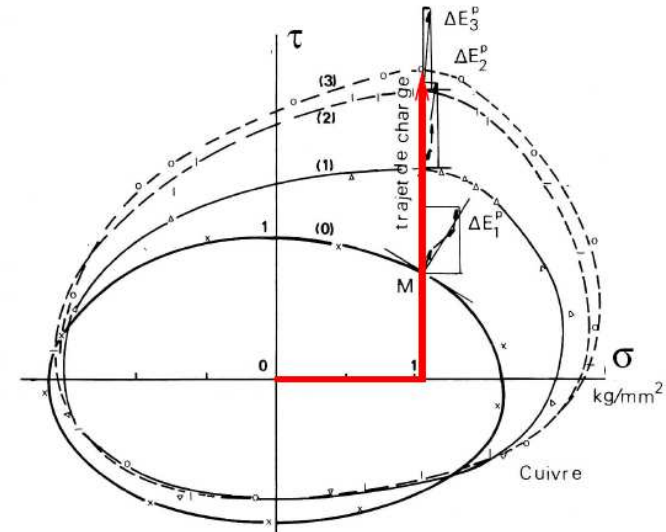
Règle de Normalité

- Observation expérimentale :

taux de déformation plastique est **normal** à la surface de charge



[Bui, 1970]



- Formulation de la règle de normalité

$$\begin{cases} \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 & \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \underline{\underline{0}} \\ \text{If } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P \text{ is directed as the outgoing normal to } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

$\dot{\gamma}$: multiplicateur plastique (a priori inconnu)

Règle de normalité : Critère de Von Mises

➤ Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \sqrt{\sigma_{ij}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\sigma_{ij}^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}^2) = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij}^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma_{eq}} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\sigma_{ij}^2 + \frac{(tr \sigma)^2}{3} - \frac{2(tr \sigma)^2}{3} \right] \right] = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \times \left[2\sigma_{ij} - \frac{2(tr \sigma)}{3} \delta_{ij} \right] = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \sigma_{ij}^D \end{aligned}$$

Règle de normalité : Critère de Von Mises

- Normale à la surface de charge

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}} \quad (\|\underline{\underline{N}}\| = 1)$$

- Règle de normalité

Purement déviatorique

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

- Lien entre $\dot{\gamma}$ et \dot{p} :

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^{\text{eq}} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{p} = \dot{\gamma}$$

Loi de comportement s'écrit finalement :

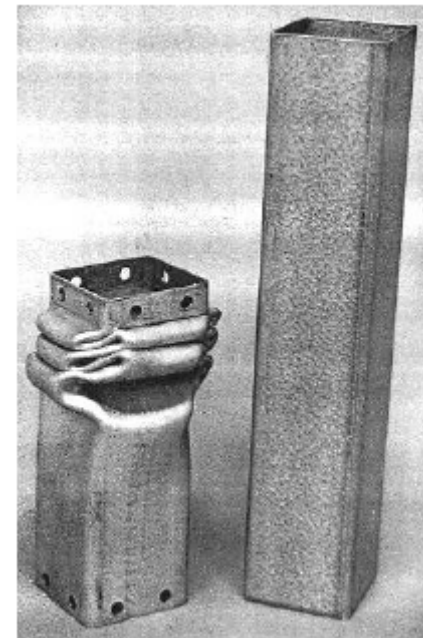
$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \dot{p} \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{\underline{N}}$$

1. Exemples de calcul de structures à comportement non linéaires
2. Algorithmes de type Newton pour la résolution de problèmes non linéaires
3. Comportement élastoplastique (rappels)

Cas 1D

Extension au cas général

Synthèse



dissipators employed
in crash tests

Synthèse

➤ Hypothèses

- HPP, linéaire, isotrope, élastique
- Critère de Von Mises
- Règle de normalité, écrouissage isotrope

Loi de comportement linéaire élastique isotrope :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

$$3\kappa = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

➤ Loi de comportement

$$\sigma^{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{s}}\|}$$

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma^{\text{eq}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{P}})$$

Elasticité

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p) \leq 0$$

Critère de Von Mises

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{\text{P}} = \dot{p} \frac{3}{2\sigma^{\text{eq}}} \underline{\underline{s}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{p} \underline{\underline{N}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p}(\sigma^{\text{eq}} - R(p)) = 0$$

Règle de normalité

Hypothèse sur $R(p)$ (convexité de $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = \sigma^{\text{eq}} - R(p)$)

(i) $R(0) = R_0$ (ii) $R'(p) \geq 0$

(iii) $R(\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2) \geq \alpha R(p_1) + (1 - \alpha)R(p_2) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$

that's all folks